Universidade do Minho
Departamento de Matemática
Lic. em Ciências da Computação

Ano Lectivo de 2021/2022
1^o Semestre

Análise Numérica

Folha 6 - Sistemas de equações lineares

---

1. Dada uma matriz A, de ordem n, não-singular, e um vector b, a execução de $\gg x = A\backslash b$, no Matlab, dá a solução x do sistema $Ax = b$. No caso de A não ser quadrada (isto é, o número de incógnitas x_i diferente do número de equações), a solução do sistema pode não existir (sistema impossível) ou o sistema pode ser indeterminado (isto é, a solução não ser única). Mesmo nestes casos, o Matlab apresentará sempre uma e uma só "solução" que é preciso saber interpretar em cada caso. Execute, $\gg x = A\backslash b$ em cada um dos seguintes casos e comente os resultados obtidos:

   a) $A = [1\ 2\ 3; 4\ 5\ 6]$, $b = [1; 1]$

   b) $A = [3\ 1; 2\ 1; 1\ 0]; b = [5\ 4\ 1]'$

   c) $A = [3\ 1; 2\ 1; 1\ 0]; b = [5\ 4\ 0]'$

   d) $A = [3\ 1\ 2; 2\ 1\ 6; 5\ 2\ 8]; b = [5\ 4\ 1]'$

2. **a)** Apresente na forma de um algoritmo o método de substituição inversa para sistemas $Ax = b$, sendo A uma matriz triangular superior;

   b) Verifique que o número de operações aritméticas do algoritmo é exactamente igual a n^2, sendo n a ordem da matriz A;

   c) Desenvolva no Matlab uma função, $x =$ `STriangular` (A, b), que implementa o algoritmo;

   d) Para gerar a matriz que é a parte triangular superior da matriz de Hilbert de ordem 5, execute $\gg A = triu(hilb(5))$; use a função da alínea anterior para resolver o sistema com a matriz A e b o vector de unidades.

   e) Use a mesma função o número de vezes que for necessário para calcular a inversa A^{-1}. Compare o resultado obtido com a matriz dada por $inv(A)$.

3. **a)** Apresente na forma de um algoritmo o método de eliminação de Gauss (sem pivotação) para resolver o sistema $Ax = b$, sendo A uma matriz de ordem n;

   b) Verifique que o número de operações aritméticas do algoritmo é aproximadamente igual a $\frac{2}{3}n^3$;

   c) Desenvolva no Matlab uma função, $x =$ `GaussElim`(A, b), que implementa o algoritmo; reduzida a matriz do sistema à forma triangular superior, por transformações de equivalência, a função `GaussElim` usa a função `STriangular` para a fase da substituição inversa;

   d) Teste a sua função `GaussElim` com $A = rand(4)$ e $b = ones(4, 1)$. Calcule o resíduo $r := b - Ax$.

4. Considere a seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1.25 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Tente resolver o sistema $Ax = b$, com $b = ones(3,1)$, usando a função `GaussElim` que desenvolveu antes. O que acontece? Qual é o problema?

b) Altere o valor na posição $(2,2)$ da matriz fazendo $\gg A(2,2) = 1 + 2\hat{\ } - 52$. Resolva o sistema com $b = ones(3,1)$, usando a função `GaussElim`. Compare a solução obtida com o resultado dado por $\gg A\backslash b$.

5. **a)** A partir do código da função `GaussElim` desenvolva uma implementação do método de eliminação de Gauss com pivotação parcial (chame-lhe `GaussElimPP)`.

b) Use a nova função para resolver o sistema do exercício anterior e compare a solução obtida com o resultado de $\gg A\backslash b$.

6. **a)** No Matlab execute $A = hilb(10)$ para definir a matriz de Hilbert de ordem 10 e $x = ones(10,1)$. Calcule o vector b, tal que x é a solução do sistema $Ax = b$.

b) Verifique que a solução $xtil$ do sistema $Ax = b$ dada por $xtil = A\backslash b$ tem um erro elevado. Qual é o problema?

7. Considere as matrizes seguintes

$$A = \begin{bmatrix} \epsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \epsilon^{-1} & 1 \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} \epsilon & 1 \\ 0 & 1-\epsilon^{-1} \end{bmatrix}.$$

Uma vez que se tem $A = L \cdot U$, para determinar a solução do sistema $Ax = b$, podemos resolver $Ly = b$ e $Ux = y$.

a) Para resolver o sistema com $\epsilon = 2^{-52}$ e $b = [10\ 1]^t$, defina no Matlab as matrizes L e U e resolva os sistemas $Ly = b$ e $Ux = y$.

b) Tendo em conta que a solução exacta é $x = \left(\frac{9}{\epsilon-1}, \frac{\epsilon-10}{\epsilon-1}\right)$, use a teoria do condicionamento de sistemas de equações lineares para explicar o erro cometido.

c) Uma vez que podemos escrever $A = P \cdot L \cdot U$, com

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \epsilon & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1-\epsilon \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

podemos usar esta decomposição para resolver o mesmo sistema. Será de esperar uma solução melhor do que a obtida em a)? Porquê?