

Análise Numérica

Ficha de exercícios nº 5 - Integração numérica

1. a) Usa a regra do ponto médio para calcular o valor de $\int_0^2 (3x + 2) dx$. Compara com o valor exacto.
- b) No mesmo gráfico, esboça as rectas $y = p(x)$ e $y = p\left(\frac{a+b}{2}\right)$, com $a = 0$, $b = 2$ e $p(x) = 3x + 2$, e interpreta a igualdade verificada na alínea anterior.
- c) Com $p(x) = mx + r$, mostra que se tem, quaisquer que sejam os limites de integração a e b e os coeficientes m e r ,

$$\int_a^b p(x) dx = (b - a) \cdot p\left(\frac{a + b}{2}\right)$$

ou seja, a regra do ponto médio é exacta para todos os polinómios de grau não superior a 1 (isto é, o grau de exactidão desta regra é um).

2. A regra (simples) dos trapézios baseia-se na interpolação da função nos nós que são os limites de integração, isto é, para aproximar o valor do integral $\int_a^b f(x) dx$ substitui-se a função integranda f pelo polinómio de grau não superior a um que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Resulta

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b - a}{2} [f(a) + f(b)] + E_T$$

onde E_T representa o erro cometido na aproximação.

- a) Calcula $I = \int_0^1 \exp(-x) dx$ pela regra descrita anteriormente e compare com o valor exacto.
- b) Calcula $I = \int_0^{1/2} \exp(-x) dx + \int_{1/2}^1 \exp(-x) dx$ usando a regra dos trapézios para cada um dos integrais. Compare com o valor exacto.
- c) Calcula $I = \int_0^{1/4} \exp(-x) dx + \int_{1/4}^{1/2} \exp(-x) dx + \int_{1/2}^{3/4} \exp(-x) dx + \int_{3/4}^1 \exp(-x) dx$ usando a regra dos trapézios para cada um dos integrais. Compare com o valor exacto.
3. Sendo f uma função de classe C^2 no intervalo $[a, b]$, tem-se, com $h = (b - a)/n$ e $x_i = a + ih$, para $i = 0, 1, \dots, n$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right] - \frac{h^2}{12} (b - a) f''(\eta)$$

onde $\eta \in (a, b)$. No Matlab escreve uma função **T=trapezios (f,a,b,n)** para calcular uma aproximação para o valor do integral $I = \int_a^b f(x) dx$, usando a regra dos trapézios composta (n é o número de subintervalos de igual amplitude em que se divide o intervalo de integração).

4. Sendo f uma função de classe C^4 no intervalo $[a, b]$, tem-se, com $h = (b - a)/n$ e $x_i = a + ih$, para $i = 0, 1, \dots, n$, e $m = n/2$ (n tem de ser par):

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4 \sum_{i=1}^m f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + f(b) \right] - \frac{h^4}{180} (b - a) f^{(iv)}(\eta)$$

onde $\eta \in (a, b)$. No Matlab escreve uma função **S=simpson(f,a,b,n)** para calcular uma aproximação para o valor do integral $I = \int_a^b f(x)dx$, usando a *regra de Simpson composta*.

5. Considera o integral $I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$.

a) Usa a função **trapezios** para calcular, para cada $k = 1, \dots, 8$, o valor de $T(k)$ que é a aproximação obtida com $n = 2^k$. Verifique que a sequência $T(k)$ das aproximações converge para o valor exacto que é π .

b) Repete o exercício com a função **simpson** para calcular $S(1), \dots, S(8)$. No Matlab execute

$$>> [T' - pi \quad S' - pi]$$

para comparar os erros obtidos com as regras.

6. Repete o exercício anterior para calcular $I = \int_0^1 x^{1/2} dx$ pelas regras dos trapézios e de Simpson. Compare os resultados obtidos com o valor exacto.

7. Para se saber a quantidade M de massa radioactiva que entra ou sai de um reactor durante um certo período de tempo (entre os instantes t_1 e t_2) pode ser usada a fórmula

$$M = \int_{t_1}^{t_2} (Q \times c) dt$$

onde c representa a *concentração* e Q representa o *fluxo*. Se o fluxo for constante e igual a $5m^3/min$ e os valores da concentração medidos à saída do reactor forem os que se encontram na tabela seguinte

t, min	0	5	10	15	20	25	30
$c, mg/m^3$	10.00	21.62	35.00	52.16	44.59	37.07	32.91

usa a regra de Simpson, com $h = 5$, para calcular a quantidade de massa radioactiva que sai do reactor entre os instantes $t = 0$ e $t = 30$.

8. Uma cobertura de material ondulado vai ser construída usando uma máquina de pressão a partir de uma folha plana de alumínio e o perfil da folha ondulada tem a forma de uma onda sinusoidal. A cobertura deve ter o comprimento de $3.7 m$ e pretende-se que cada onda tenha $10 cm$ de altura e um período de aproximadamente $2\pi dm$. O comprimento da folha plana que vai ser usada é dado pelo comprimento do arco da curva $f(x) = \sin(x)$ desde $x = 0$ até $x = 37 (dm)$, ou seja, pelo integral

$$\int_0^{37} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

a) Determina as aproximações T_{20} , T_{40} , S_{20} e S_{40} para o comprimento da folha plana, usando as funções **trapezios** e **simpson** com $n = 20$ e $n = 40$, respectivamente.

b) Compara as aproximações obtidas com o valor dado pela função **quad** do Matlab (esta função usa a regra de Simpson de forma “adaptativa”, quer dizer, usa mais pontos nas regiões de [a,b] onde tal é necessário para garantir a precisão desejada).