Universidade do Minho

Departamento de Matemática

Lic. em Ciências da Computação

Ano Lectivo de 2021/2022

1^o Semestre

Análise Numérica

Ficha de exercícios n^{o}3 - Equações não-lineares

---

1. No Matlab escreva uma função $[raiz,\ funevals] = bisec\ (fun, a, b, tol)$ que usa o método da bisseção para calcular uma aproximação com erro inferior a tol para um zero da função fun que tem sinais contrários nos pontos a e b. O valor de $funevals$ é o número de vezes que $bisec$ calcula a função fun.

2. a) Determine um intervalo de amplitude um que contenha a raiz da equação $x \log x - 1 = 0$.

   b) Estime, à priori, o número de iterações necessárias a efectuar para, usando o método da bisseção, determinar uma aproximação com um erro inferior a 10^{-10}.

   c) Use a função $bisec$ com $tol = 10^{-10}$ para aproximar a raiz. Verifique que o número de iterações realizadas está de acordo com a previsão feita antes.

   d) Use de novo a função $bisec$ agora com $tol = 10^{-20}$. O que sucede?

3. Use o método de *Newton-Raphson* para calcular tão exactamente quanto possível a raiz da mesma equação $x \log x - 1 = 0$, partindo de $x^{(0)} = 1$. Compare, do ponto de vista da precisão obtida e do número de iterações requeridas, com os resultados obtidos anteriormente com o método da biseção.

4. Pretende-se resolver a equação $\frac{1}{x} - e^x = 0$, a qual admite uma raiz r que está próxima de $x^{(0)} = 0.5$.

   a) Quais das seguintes fórmulas iterativas

   $$i)\ \ x^{(k+1)} = e^{-x^{(k)}}\ , \qquad ii)\ x^{(k+1)} = -\log x^{(k)}, \qquad iii)\ x^{(k+1)} = \frac{x^{(k)} + e^{-x^{(k)}}}{2}$$

   produz uma sucessão que converge para a raiz? E em que caso a convergência é mais rápida? Justifique.

   b) Calcule uma aproximação para essa raiz, usando a fórmula mais eficiente, iterando até que $\left|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right| \leq 0.5 \times 10^{-3}$. Estime o valor do erro $\left|r - x^{(k)}\right|$.

5. Sendo f uma função com derivadas de primeira e segunda ordem contínuas num intervalo I que contem a raiz r, e sendo $x^{(k)} \in I$ uma aproximação de r, tem-se, com θ entre r e $x^{(k)}$,

   $$r = x^{(k)} - \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f'\left(x^{(k)}\right)} - \frac{f''(\theta)}{2f'\left(x^{(k)}\right)}\left(r - x^{(k)}\right)^2 \qquad (1)$$

   Use esta expressão para mostrar que se f' não se anula e f'' é limitada em I, então o método de *Newton-Raphson*, se converge, tem convergência quadrática.

6. Nos primeiros modelos de computadores digitais a divisão não era efectuada por *hardware* mas sim por *software*. Assim, a divisão de a por b com a, $b > 0$ era efectuada multiplicando a pelo inverso de b, pelo que o problema se transferia para o cálculo do inverso de um número.

a) Uma vez que $1/b$ é a solução da equação $b - \frac{1}{x} = 0$, mostre que o método de *Newton-Raphson* fornece a seguinte fórmula iterativa para o cálculo de $1/b$:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} \cdot (2 - bx^{(k)}), \qquad k = 0, 1, \ldots$$

b) Calcule por este processo o valor de $1/7$ tão exactamente quanto possível, partindo de $x^{(0)} = 0.1$

c) Observe que nas últimas iterações, o número de algarismos correctos praticamente duplica em cada iteração. Para perceber por que é que isto acontece, use a expressão (1) para mostrar que os erros evoluem de acordo com a relação $e^{(k+1)} \approx b\left(e^{(k)}\right)^2$.

d) Tente calcular o valor de $1/7$ partindo de $x^{(0)} = 0.3$. O que acontece?

7. No caso de raízes de multiplicidade superior a 1, a convergência do método de Newton é apenas linear.

   a) Para ilustrar este facto considere o polinómio $p(x) = (x-a)^m$ e mostre que para os erros de truncatura nas iterações produzidas pelo método de Newton tem-se $e^{(k+1)} = e^{(k)}\left(1 - \frac{1}{m}\right)$. O que conclui desta relação?

   b) Para $m > 2$ é preferível usar o método da bissecção? Porquê?

8. a) No Matlab execute

$$>> p = poly\ ([2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2])$$

   para produzir os coeficientes do poliómio $(x-2)^9$.

   b) Use a função *roots* para calcular os zeros de p. O que conclui ?

9. O exercício anterior ilustra o problema do condicionamento de zeros múltiplos. No entanto, mesmo zeros simples podem ser mal-condicionados. Para verificar isto, repita o exercício anterior com o polinómio cujos zeros são os inteiros desde 1 até 20.

10. Usada na forma $X = FZERO(FUN, X0)$, a função *fzero* do Matlab tenta encontrar um zero da função FUN a partir da aproximação inicial $X0$ (*fzero* é uma implementação de um método híbrido que combina bissecção, interpolação linear e interpolação quadrática inversa).

    a) Use a função *fplot* para sobrepor os gráficos, no intervalo $[-2, 2]$, das funções definidas por $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = \sin x$.

    b) Para calcular as raízes da equação $x^2 - 1 = \sin x$, use a função *fzero* com aproximações iniciais obtidas a partir dos gráficos produzidos.

    c) Repita a alínea anterior usando *fzero* na forma

$$[X, FVAL, EXITFLAG, OUTPUT] = FZERO(FUN, X0)$$

    e interprete toda a informação produzida.

    d) A equação tem outras raízes para além das que já foram calculadas ? Justifique.

11. a) Execute $fzero('x\hat{}2 + 1 - \sin(x)', 0)$. Explique o resultado obtido.

    b) Execute $fzero(@\tan, 5)$. O resultado obtido é de facto um zero da função $\tan(x)$? Explique qual é o problema.