Universidade do Minho Ano Lectivo de 2021/2022

Departamento de Matemática 1^o Semestre

Lic. em Ciências da Computação

Análise Numérica

Ficha de exercícios n^o 2 - Erros e estabilidade numérica

---

1. Escreva aproximações com 3 e 5 algarismos significativos para os números π, $1/3$, $1/11$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$, e^3 e $\log 5$.

2. Calcule a soma das seguintes séries com erro de truncatura inferior a 0.001.

   a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ldots$
   b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + (-\frac{1}{2})^n + \ldots$

3. Escreva a fórmula de Taylor com resto para $\sin x$ e determine um majorante para o erro de truncatura que se comete quando se usa

$$p_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

   para aproximar $\sin x$ no ponto $x = \pi/4$.

4. Calcule, recorrendo ao Matlab, o valor da expressão

$$z = \left[(x+y)^2 - x^2 - 2xy\right]/y^2$$

   para valores de $x = 100$ e $y = 10^{-k}$, para $k = 0, 1, ..., 10$. Explique os erros nos resultados obtidos para os valores de k maiores.

5. A sucessão de termo geral $(1 + \frac{1}{n})^n$ é monótona crescente e convergente. O limite é o conhecido número e. No Matlab execute

$$\gg S = inline('(1 + 1/n)\hat{\ }n')$$

   para definir a função S e calcule $S(n)$ com $n = 2^{52}$ e $n = 2^{53}$. Compare o valor de $e = \exp(1)$ com as aproximações obtidas e explique o resultado "estranho" que se obtem para $n = 2^{53}$.

6. Tente obter no seu computador o valor de $\lim_{n\to\infty}(100^n/n!)$, tomando valores de n sucessivamente mais elevados. O que conclui? Reorganize o cálculo dos quocientes $100^n/n!$ por forma a verificar que o limite é zero.

7. Sendo $\widetilde{x}_i$, para cada $i = 1, \cdots, n$, uma aproximação de x_i tal que $|\widetilde{x}_i - x_i| \leq E$, mostre que se tem

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}_i\right| \leq n \cdot E$$

   (nota: neste limite do erro da soma total não entramos em linha de conta com os eventuais erros de representação das somas parciais).

8. a) No Matlab, execute

$$\gg x = sqrt(1:100);\ xtil = chop(x, 24);$$

para produzir aproximações das raízes quadradas dos primeiros 100 números inteiros positivos; os valores de $xtil$ são aproximações dos valores de x com mantissas de 24 bits. Verifique que, para cada $i = 1, \cdots, 100$, tem-se $|x(i) - xtil(i)| < 10^{-6}$ (para isto basta executar $\gg \max(abs(x - xtil)))$.

b) Escreva um limite para o erro $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}_i\right|$. Execute no Matlab

$$\gg erro = sum(x) - sum(xtil)$$

e compare o erro efectivamente cometido com o limite anterior.

9. Considere o desenvolvimento em série da função exponencial

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots.$$

a) No Matlab escreva o código de uma função **[soma, n]=expTaylor(x, tol)** que calcula a soma de termos da série até encontrar um termo cujo valor absoluto seja inferior à tolerância **tol** (dada). O parâmetro de saída **n** representa o grau do último termo adicionado.

b) Teste a função **expTaylor** para $x = -1$ e $tol = 10^{-5}$ e verifique que se tem $|soma - \exp(-1)| < tol$.

c) Com o mesmo valor de tol, repita para $x = -100$.

d) Tendo em conta que $e^{-x} = 1/e^x$, use a função **expTaylor** para $x = 100$ e $tol = 10^{-5}$. Compare o inverso aritmético deste valor com o resultado obtido anteriormente. Qual dos resultados está correcto? Explique os enormes erros cometidos.

10. Considere as funções

$$F_1(x) = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} \qquad \text{e} \qquad F_2(x) = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}.$$

a) Prove que $F_1(x) = F_2(x)$, para $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Calcule o valor das duas expressões para $x = \pi 10^{-8}$e $x = \pi 10^{-9}$ utilizando o Matlab. Comente os resultados obtidos.

11. a) No Matlab calcule sucessivamente os valores de $\sqrt{x}$ e $\sqrt{x+\delta}$ com $\delta = 0.001$ e $x = 1$, $x = 100$ e $x = 1000$. Compare o número de algarismos significativos correctos de $x + \delta$ com o número de algarismos significativos correctos de $\sqrt{x+\delta}$.

b) A função é $f(x) = \sqrt{x}$ é bem ou mal condicionada? Justifique, calculando o número de condição (relativo).

12. Sejam f e g definidas, para $x > 0$, por $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ e $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$.

a) Verifique que as expressões de f e g são matematicamente equivalentes.

b) Verique que o número de condição (relativo) de f é igual ao número de condição (relativo) de g e tem-se

$$condf(x) = condg(x) = -\frac{x}{2}.\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$$

c) No Matlab, calcule $f(x)$ e $g(x)$ para $x = 10$, $x = 10^7$, $x = 10^{11}$ e $x = 10^{16}$. Como explica a discrepância em muitos dos algarismos de $f(x)$ e $g(x)$?