Departamento de Matemática | Universidade do Minho

Tópicos de Matemática | 2º teste – 28 nov 2022

Lic. em Ciências de Computação - 1º ano | duração: uma hora

Nome ______________________________ Número ______________

**Responda no próprio enunciado, colocando uma cruz no quadrado correspondente. Cada questão está cotada com 0,8 valores numa escala de 0 a 20. Respostas erradas não têm qualquer penalização.**

**Em cada uma das questões seguintes, diga se é verdadeira (V) ou falsa (F) a proposição, assinalando a opção conveniente:**

1. Se $A = \{2, \{2\}\}$ e $B = \{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$, então, $A \in B$ e $A \subseteq B$. V☐ F☐
1. Se $A = \{1, \{2\}\}$ e $B = \{1, \{2\}, \{1, \{2\}\}\}$, então, $A \in B$ e $A \subseteq B$. V☐ F☐
1. Se $A = \{1, \{1\}\}$ e $B = \{1, \{1\}, \{1, \{1\}\}\}$, então, $A \in B$ e $A \subseteq B$. V☐ F☐
2. $\{\varnothing\} \in \{\{\varnothing\}\}$ e $\{\varnothing\} \subseteq \{\{\varnothing\}\}$. V☐ F☐
2. $\varnothing \in \{\{\varnothing\}\}$ e $\{\varnothing\} \subseteq \{\{\varnothing\}\}$. V☐ F☐
2. $\varnothing \in \{\varnothing\}$ e $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$. V☐ F☐
3. Para todos os conjuntos $A$, $B$ e $C$, $A \cap (B \cup C) = A \cup (B \cap C)$. V☐ F☐
3. Para todos os conjuntos $A$, $B$ e $C$, $B \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$. V☐ F☐
3. Para todos os conjuntos $A$, $B$ e $C$, $C \cap (A \cup B) = A \cup (B \cap C)$. V☐ F☐
4. Para todos os conjuntos $A$, $B$ e $C$, se $A \backslash B \subseteq C$, então, $A \backslash C \subseteq B$. V☐ F☐
4. Para todos os conjuntos $A$, $B$ e $C$, se $A \backslash B \subseteq C$ e $A \not\subseteq C$, então, $A \cap B \neq \varnothing$. V☐ F☐
4. Para todos os conjuntos $A$, $B$ e $C$, se $A \backslash B \subseteq C$ e $A \not\subseteq C$, então, $A \backslash C \subseteq B$. V☐ F☐
5. Para todo o conjunto $A$, se $A \times \{a, b\} = \varnothing$, então, $A = \varnothing$. V☐ F☐
5. Para todo o conjunto $A$, se $\{1, 2\} \times A = \varnothing$, então, $A = \varnothing$. V☐ F☐
5. Para todo o conjunto $A$, se $A \times A = \varnothing$, então, $A = \varnothing$. V☐ F☐
6. Se o produto cartesiano de dois conjuntos tem exatamente 11 elementos, então, um dos conjuntos tem um único elemento. V☐ F☐
6. Se o produto cartesiano de dois conjuntos tem exatamente 7 elementos, então, um dos conjuntos tem um único elemento. V☐ F☐
6. Se o produto cartesiano de dois conjuntos tem exatamente 12 elementos, então, um dos conjuntos tem um único elemento. V☐ F☐
7. Para todos os conjuntos $A$ e $B$, $A \times B = B \times A$. V☐ F☐
7. Existem conjuntos $A$ e $B$ para os quais $A \times B = B \times A$. V☐ F☐
7. Para todos os conjuntos $A$ e $B$, $A \times B \neq B \times A$. V☐ F☐
8. Para todos os conjuntos $A$ e $B$, $\mathcal{P}(A \times B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. V☐ F☐

8. Para $A=\{a,b\}$ e $B=\{1\}$, $\mathcal{P}(A\times B)=\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)$. V☐ F☐

8. Para $A=\{1,2\}$ e $B=\{2,3\}$, $\mathcal{P}(A\times B)=\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)$. V☐ F☐

9. Se $A=\{1,2\}$ e $B=\{a,b,c\}$, então, uma relação binária de $A$ em $B$ tem, no máximo, 6 elementos. V☐ F☐

9. Se $A=\{1,2,3\}$ e $B=\{a,b\}$, então, uma relação binária de $A$ em $B$ tem, no mínimo, 6 elementos. V☐ F☐

9. Se $A=\{1,2\}$ e $B=\{a,b,c\}$, então, uma relação binária de $A$ em $B$ tem exatamente 6 elementos. V☐ F☐

10. Para a relação binária $R$ de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$, definida por

$$(x,y)\in R \Leftrightarrow 2x=4y, \qquad x,y\in\mathbb{N},$$

pode-se concluir que $(\frac{1}{2},1)\in R^{-1}$. V☐ F☐

10. Para a relação binária $R$ de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$, definida por

$$(x,y)\in R \Leftrightarrow 2x=3y, \qquad x,y\in\mathbb{N},$$

pode-se concluir que $(\frac{2}{3},1)\in R^{-1}$. V☐ F☐

10. Para a relação binária $R$ de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$, definida por

$$(x,y)\in R \Leftrightarrow 6x=3y, \qquad x,y\in\mathbb{N},$$

pode-se concluir que $(1,\frac{1}{2})\in R^{-1}$. V☐ F☐

11. Dados conjuntos $A$, $B$ e $C$, relações binárias $R,S$ de $B$ em $C$ e $T$ relação binária de $A$ em $B$, se $R\circ T\subseteq S\circ T$, então, $R\subseteq S$. V☐ F☐

11. Dadas relações binárias $R,S$ e $T$ num conjunto $A$, se $R\circ T\subseteq R\circ S$, então, $T\subseteq S$. V☐ F☐

11. Dadas relações binárias $R,S$ e $T$ num conjunto $A$, se $R\circ T\subseteq S\circ T$, então, $R\subseteq S$. V☐ F☐

12. Para toda a relação binária $R$ num conjunto $A$, $R^{-1}\circ R^{-1}=\mathrm{id}_A$. V☐ F☐

12. Para toda a relação binária $R$ num conjunto $A$, $R\circ R^{-1}=\mathrm{id}_A$. V☐ F☐

12. Para toda a relação binária $R$ num conjunto $A$, $R\circ R^{-1}=\mathrm{id}_A$. V☐ F☐

13. Para toda a função $g$ de um conjunto $X$ num conjunto $Y$, $g^{-1}$ é uma função de $Y$ em $X$. V☐ F☐

13. Para toda a função $f$ de um conjunto $A$ num conjunto $B$, $f^{-1}$ é uma função de $B$ em $A$. V☐ F☐

14. Não existem funções injetivas de $A=\{1,2\}$ em $B=\{1,2,3\}$. V☐ F☐

14. Não existem funções injetivas de $A=\{1,2,3\}$ em $B=\{1,2\}$. V☐ F☐

14. Não existem funções injetivas de $A=\{1,2,3,4\}$ em $B=\{1,2,3\}$. V☐ F☐

15. A função real de variável real definida por $f(x)=x^2+4x-5$, $x\in\mathbb{R}$, admite função inversa. V☐ F☐

15. A função real de variável real definida por $f(x)=x^2-3x+10$, $x\in\mathbb{R}$, admite função inversa. V☐ F☐

15. A função real de variável real definida por $f(x)=x^4-5$, $x\in\mathbb{R}$, admite função inversa. V☐ F☐

16. Para toda a relação binária $R$ num conjunto $A$, $R \circ R^{-1}$ não é uma função de $A$ em $A$. V☐ F☐

16. Para toda a relação binária $R$ num conjunto $A$, $R \circ R^{-1}$ é uma função de $A$ em $A$. V☐ F☐

16. Para toda a relação binária $R$ num conjunto $A$, $R^{-1} \circ R$ é uma função de $A$ em $A$. V☐ F☐

17. Se

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \sqrt{2} & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}, \end{array}$$

então $f \circ f = f$. V☐ F☐

17. Se

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \sqrt{2} & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \end{cases}, \end{array}$$

então $f \circ f = f$. V☐ F☐

17. Se

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \sqrt{3} & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}, \end{array}$$

então $f \circ f = f$. V☐ F☐

**Em cada uma das questões seguintes, assinale a(s) opção(ões) correta(s):**

18. Sejam $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

☐ $\{\varnothing\} \subseteq A$; ☐ $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \in A$; ☐ $\{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \in A$; ☐ $\{\{\varnothing\}\} \in A$.

18. Sejam $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

☐ $\varnothing \subseteq A$; ☐ $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \in A$; ☐ $\{\{\varnothing\}\} \subseteq A$; ☐ $\{\{\varnothing\}\} \in A$.

18. Seja $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

☐ $\varnothing \in A$; ☐ $\{\varnothing\} \subseteq A$; ☐ $\{\{\varnothing\}\} \in A$; ☐ $\{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \in A$.

19. Para quaisquer conjuntos $A$ e $B$,

☐ $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$; ☐ $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$;
☐ $A \backslash \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A) \backslash B$; ☐ Se $B \in \mathcal{P}(A \cap B)$ então $B \subseteq A$.

19. Para quaisquer conjuntos $A$ e $B$,

☐ $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$; ☐ $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$;
☐ $\mathcal{P}(A \backslash B) = \mathcal{P}(A) \backslash \mathcal{P}(B)$; ☐ Se $A \cup B \in \mathcal{P}(A \cap B)$ então $A = B$.

19. Para quaisquer conjuntos $A$ e $B$,

☐ $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$; ☐ $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(A \cap B)$;
☐ $\mathcal{P}(A \backslash B) = \mathcal{P}(A) \backslash \mathcal{P}(B)$; ☐ Se $A \cup B \in \mathcal{P}(A)$ então $B \subseteq A$.

20. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2\}$. Então,

☐ $A \times B = \{2, 4, 6\}$;
☐ $A \times B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$;
☐ $A \times B = \{(1,2), (2,2), (3,2)\}$;
☐ $A \times B = \{(2,1), (2,2), (2,3)\}$.

20. Sejam $A = \{2\}$ e $B = \{1,2,3\}$. Então,

$\square$ $A \times B = \{2,4,6\}$;
$\square$ $A \times B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$;
$\square$ $A \times B = \{(1,2),(2,2),(3,2)\}$;
$\square$ $A \times B = \{(2,1),(2,2),(2,3)\}$.

20. Sejam $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{1,2,3\}$. Então,

$\square$ $A \times B = \{1,4,9\}$;
$\square$ $A \times B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$;
$\square$ $A \times B = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$;
$\square$ $A \times B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,4),(2,6),(3,1),(3,6),(3,9)\}$.

21. Sejam $A = \{1,2,4,8\}$ e $B = \{-1,0,1,2\}$. Se $R$ é a relação binária de $A$ em $B$ definida por

$$(x,y) \in R \Leftrightarrow x^y \in A \qquad (x \in A, y \in B),$$

então,

$\square$ $D_R = A$; $\square$ $D'_R = \{0,1,2\}$; $\square$ $R(\{4,8\}) = \{0,1,2\}$; $\square$ $R^{\leftarrow}(\{-1\}) = \varnothing$.

21. Sejam $A = \{-1,0,1,2\}$ e $B = \{1,2,4,8\}$. Se $R$ é a relação binária de $A$ em $B$ definida por

$$(x,y) \in R \Leftrightarrow y^x \in B \qquad (x \in A, y \in B),$$

então,

$\square$ $D_R = A$; $\square$ $D'_R = B$; $\square$ $R^{\leftarrow}(\{4,8\}) = \{0,1,2\}$; $\square$ $R(\{-1\}) = \varnothing$.

22. Se $A = \{a,b,c\}$ e $R = \{(a,b),(a,c),(b,a),(c,c)\}$, então,

$\square$ $R \circ R = \{(a,a),(b,b),(b,c),(c,c)\}$; $\square$ $R \circ R = \{(a,a),(a,c),(b,b),(c,c)\}$;
$\square$ $R \circ R = \{(a,a),(a,c),(b,b),(b,c),(c,c),(b,a)\}$; $\square$ $R \circ R = \{(a,a),(a,c),(b,b),(b,c),(c,c)\}$.

22. Se $A = \{1,2,3\}$ e $R = \{(1,2),(1,3),(2,1),(3,3)\}$, então,

$\square$ $R \circ R = \{(1,1),(1,3),(2,2),(3,3)\}$; $\square$ $R \circ R = \{1,1),(2,2),(2,3),(3,3)\}$;
$\square$ $R \circ R = \{(1,1),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3),(2,1)\}$; $\square$ $R \circ R = \{(1,1),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$.

23. Sejam $X$ e $Y$ conjuntos e $f : X \to Y$ uma função tal

$$\exists_{h:Y\to X}: \ h \circ f = \mathrm{id}_X \text{ e } \exists_{g:Y\to X} : f \circ g = \mathrm{id}_Y.$$

Então,

$\square$ $f$ é bijetiva; $\square$ $f$ admite inversa;
$\square$ $h = g$; $\square$ nenhuma das outras afirmações é verdadeira.

23. Sejam $A$ e $B$ conjuntos e $f : A \to B$ uma função tal

$$\exists_{g:B\to A}: \ g \circ f = \mathrm{id}_A \text{ e } \exists_{h:B\to A} : f \circ h = \mathrm{id}_B.$$

Então,

☐ $f$ é bijetiva; ☐ $f$ admite inversa;

☐ $g = h$; ☐ nenhuma das outras afirmações é verdadeira.

24. Para $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{a,b\}$, seja $f : A \to B$ a aplicação definida por $f(1) = a$, $f(2) = a$ e $f(3) = b$. Considere $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ definida por

$$F(X) = \{f(X), B \backslash f(X)\}, \qquad (\forall X \in \mathcal{P}(A))\,.$$

Então,

☐ $F(\{1,2\}) = F(\{1,3\})$; ☐ $F(\varnothing) = F(\{2,3\})$;

☐ $F^{\leftarrow}(\{\{a\}\}) = \{\{1,2\}\}$; ☐ $F^{\leftarrow}(\{\{a\}\}) = \varnothing$.

24. Para $A = \{a,b,c\}$ e $B = \{1,2\}$, seja $f : A \to B$ a aplicação definida por $f(a) = 1$, $f(b) = 1$ e $f(c) = 2$. Considere $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ definida por

$$F(X) = \{f(X), B \backslash f(X)\}, \qquad (\forall X \in \mathcal{P}(A))\,.$$

Então,

☐ $F(\varnothing) = F(\{b,c\})$; ☐ $F(\{a,b\}) = F(\{a,c\})$;

☐ $F^{\leftarrow}(\{\{1\}\}) = \varnothing$; ☐ $F^{\leftarrow}(\{\{1\}\}) = \{\{a,b\}\}$.

25. Considere a função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f((x,y)) = \begin{cases} x - y & \text{se } y \neq 0 \\ 3 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Então,

☐ $f$ é sobrejetiva e não injetiva; ☐ $f$ é não sobrejetiva e injetiva;

☐ $f$ é sobrejetiva e injetiva; ☐ $f$ é não sobrejetiva e não injetiva.

25. Considere a função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f((x,y)) = \begin{cases} x + y & \text{se } y \neq 0 \\ 2 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Então,

☐ $f$ é sobrejetiva e não injetiva; ☐ $f$ é não sobrejetiva e injetiva;

☐ $f$ é sobrejetiva e injetiva; ☐ $f$ é não sobrejetiva e não injetiva.