Departamento de Matemática	Universidade do Minho
Tópicos de Matemática	2º teste – 28 nov 2022
Lic. em Ciências de Computação - 1º ano	duração: uma hora

Proposta de correção

Responda no próprio enunciado, colocando uma cruz no quadrado correspondente. Cada questão está cotada com 0,8 valores numa escala de 0 a 20. Respostas erradas não têm qualquer penalização.

Em cada uma das questões seguintes, diga se é verdadeira (V) ou falsa (F) a proposição, assinalando a opção conveniente:

1. Se $A = \{1, \{1\}\}$ e $B = \{1, \{1\}, \{1, \{1\}\}\}$, então, $A \in B$ e $A \subseteq B$. V☒ F☐

1. Se $A = \{2, \{2\}\}$ e $B = \{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$, então, $A \in B$ e $A \subseteq B$. V☐ F☒

1. Se $A = \{1, \{2\}\}$ e $B = \{1, \{2\}, \{1, \{2\}\}\}$, então, $A \in B$ e $A \subseteq B$. V☒ F☐

2. $\varnothing \in \{\varnothing\}$ e $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$. V☒ F☐

2. $\{\varnothing\} \in \{\{\varnothing\}\}$ e $\{\varnothing\} \subseteq \{\{\varnothing\}\}$. V☐ F☒

2. $\varnothing \in \{\{\varnothing\}\}$ e $\{\varnothing\} \subseteq \{\{\varnothing\}\}$. V☐ F☒

3. Para todos os conjuntos A, B e C, $C \cap (A \cup B) = A \cup (B \cap C)$. V☐ F☒

3. Para todos os conjuntos A, B e C, $B \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$. V☐ F☒

3. Para todos os conjuntos A, B e C, $A \cap (B \cup C) = A \cup (B \cap C)$. V☐ F☒

4. Para todos os conjuntos A, B e C, se $A \backslash B \subseteq C$, então, $A \backslash C \subseteq B$. V☒ F☐

4. Para todos os conjuntos A, B e C, se $A \backslash B \subseteq C$ e $A \not\subseteq C$, então, $A \cap B \neq \varnothing$. V☒ F☐

4. Para todos os conjuntos A, B e C, se $A \backslash B \subseteq C$ e $A \not\subseteq C$, então, $A \backslash C \subseteq B$. V☒ F☐

5. Para todo o conjunto A, se $\{1, 2\} \times A = \varnothing$, então, $A = \varnothing$. V☒ F☐

5. Para todo o conjunto A, se $A \times \{a, b\} = \varnothing$, então, $A = \varnothing$. V☒ F☐

5. Para todo o conjunto A, se $A \times A = \varnothing$, então, $A = \varnothing$. V☒ F☐

6. Se o produto cartesiano de dois conjuntos tem exatamente 12 elementos, então, um dos conjuntos tem um único elemento. V☐ F☒

6. Se o produto cartesiano de dois conjuntos tem exatamente 11 elementos, então, um dos conjuntos tem um único elemento. V☒ F☐

6. Se o produto cartesiano de dois conjuntos tem exatamente 7 elementos, então, um dos conjuntos tem um único elemento. V☒ F☐

7. Para todos os conjuntos A e B, $A \times B = B \times A$. V☐ F☒

7. Para todos os conjuntos A e B, $A \times B \neq B \times A$. V☐ F☒

7. Existem conjuntos A e B para os quais $A \times B = B \times A$. V☒ F☐

8. Para todos os conjuntos A e B, $\mathcal{P}(A \times B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. V☐ F☒

8. Para $A = \{1, 2\}$ e $B = \{2, 3\}$, $\mathcal{P}(A \times B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. V☐ F☒

8. Para $A = \{a, b\}$ e $B = \{1\}$, $\mathcal{P}(A \times B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. V☐ F☒

9. Se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$, então, uma relação binária de A em B tem, no máximo, 6 elementos. V☒ F☐

9. Se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$, então, uma relação binária de A em B tem exatamente 6 elementos. V☐ F☒

9. Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b\}$, então, uma relação binária de A em B tem, no mínimo, 6 elementos. V☐ F☒

10. Para a relação binária R de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$, definida por

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow 2x = 4y, \qquad x, y \in \mathbb{N},$$

pode-se concluir que $(\frac{1}{2}, 1) \in R^{-1}$. V☐ F☒

10. Para a relação binária R de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$, definida por

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow 2x = 3y, \qquad x, y \in \mathbb{N},$$

pode-se concluir que $(\frac{2}{3}, 1) \in R^{-1}$. V☐ F☒

10. Para a relação binária R de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$, definida por

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow 6x = 3y, \qquad x, y \in \mathbb{N},$$

pode-se concluir que $(1, \frac{1}{2}) \in R^{-1}$. V☐ F☒

11. Dados conjuntos A, B e C, relações binárias R, S de B em C e T relação binária de A em B, se $R \circ T \subseteq S \circ T$, então, $R \subseteq S$. V☐ F☒

11. Dadas relações binárias R, S e T num conjunto A, se $R \circ T \subseteq S \circ T$, então, $R \subseteq S$. V☐ F☒

11. Dadas relações binárias R, S e T num conjunto A, se $R \circ T \subseteq R \circ S$, então, $T \subseteq S$. V☐ F☒

12. Para toda a relação binária R num conjunto A, $R^{-1} \circ R^{-1} = \mathrm{id}_A$. V☐ F☒

12. Para toda a relação binária R num conjunto A, $R^{-1} \circ R = \mathrm{id}_A$. V☐ F☒

12. Para toda a relação binária R num conjunto A, $R \circ R^{-1} = \mathrm{id}_A$. V☐ F☒

13. Para toda a função g de um conjunto X num conjunto Y, g^{-1} é uma função de Y em X. V☐ F☒

13. Para toda a função f de um conjunto A num conjunto B, f^{-1} é uma função de B em A. V☐ F☒

14. Não existem funções injetivas de $A = \{1, 2\}$ em $B = \{1, 2, 3\}$. V☐ F☒

14. Não existem funções injetivas de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ em $B = \{1, 2, 3\}$. V☒ F☐

14. Não existem funções injetivas de $A = \{1, 2, 3\}$ em $B = \{1, 2\}$. V☒ F☐

15. A função real de variável real definida por $f(x) = x^2 + 4x - 5$, $x \in \mathbb{R}$, admite função inversa. V☐ F☒

15. A função real de variável real definida por $f(x) = x^4 - 5$, $x \in \mathbb{R}$, admite função inversa. V☐ F☒

15. A função real de variável real definida por $f(x) = x^2 - 3x + 10$, $x \in \mathbb{R}$, admite função inversa. V☐ F☒

16. Para toda a relação binária R num conjunto A, $R^{-1} \circ R$ é uma função de A em A. V$\square$ F$\boxtimes$

16. Para toda a relação binária R num conjunto A, $R \circ R^{-1}$ não é uma função de A em A. V$\square$ F$\boxtimes$

17. Se

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \sqrt{3} & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}, \end{array}$$

então $f \circ f = f$. V$\square$ F$\boxtimes$

17. Se

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \sqrt{2} & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \end{cases}, \end{array}$$

então $f \circ f = f$. V$\boxtimes$ F$\square$

17. Se

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \sqrt{2} & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}, \end{array}$$

então $f \circ f = f$. V$\square$ F$\boxtimes$

Em cada uma das questões seguintes, assinale a(s) opção(ões) correta(s):

18. Sejam $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

$\boxtimes$ $\{\varnothing\} \subseteq A$; $\boxtimes$ $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \in A$; $\{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \in A$; $\square$ $\{\{\varnothing\}\} \in A$.

18. Seja $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

$\boxtimes$ $\varnothing \in A$; $\boxtimes$ $\{\varnothing\} \subseteq A$; $\square$ $\{\{\varnothing\}\} \in A$; $\square$ $\{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \in A$.

18. Sejam $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

$\boxtimes$ $\varnothing \subseteq A$; $\boxtimes$ $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \in A$; $\boxtimes$ $\{\{\varnothing\}\} \subseteq A$; $\square$ $\{\{\varnothing\}\} \in A$.

19. Para quaisquer conjuntos A e B,

$\boxtimes$ $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$; $\square$ $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$;
$\square$ $\mathcal{P}(A \backslash B) = \mathcal{P}(A) \backslash \mathcal{P}(B)$; $\boxtimes$ Se $A \cup B \in \mathcal{P}(A \cap B)$ então $A = B$.

19. Para quaisquer conjuntos A e B,

$\boxtimes$ $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$; $\square$ $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(A \cap B)$;
$\square$ $\mathcal{P}(A \backslash B) = \mathcal{P}(A) \backslash \mathcal{P}(B)$; $\boxtimes$ Se $A \cup B \in \mathcal{P}(A)$ então $B \subseteq A$.

19. Para quaisquer conjuntos A e B,

$\square$ $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$; $\boxtimes$ $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$;
$\square$ $A \backslash \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A) \backslash B$; $\boxtimes$ Se $B \in \mathcal{P}(A \cap B)$ então $B \subseteq A$.

20. Sejam $A = \{2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Então,

$\square$ $A \times B = \{2, 4, 6\}$;
$\square$ $A \times B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$;
$\square$ $A \times B = \{(1,2), (2,2), (3,2)\}$;
$\boxtimes$ $A \times B = \{(2,1), (2,2), (2,3)\}$.

20. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Então,

- ☐ $A \times B = \{1, 4, 9\}$;
- ☒ $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$;
- ☐ $A \times B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$;
- ☐ $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 6), (3, 9)\}$.

20. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2\}$. Então,

- ☐ $A \times B = \{2, 4, 6\}$;
- ☐ $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$;
- ☒ $A \times B = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$;
- ☐ $A \times B = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$.

21. Sejam $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 4, 8\}$. Se R é a relação binária de A em B definida por

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow y^x \in B \qquad (x \in A, y \in B),$$

então,

☒ $D_R = A$; ☒ $D'_R = B$; ☐ $R^{\leftarrow}(\{4, 8\}) = \{0, 1, 2\}$; ☐ $R(\{-1\}) = \varnothing$.

21. Sejam $A = \{1, 2, 4, 8\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2\}$. Se R é a relação binária de A em B definida por

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow x^y \in A \qquad (x \in A, y \in B),$$

então,

☒ $D_R = A$; ☐ $D'_R = \{0, 1, 2\}$; ☐ $R(\{4, 8\}) = \{0, 1, 2\}$; ☐ $R^{\leftarrow}(\{-1\}) = \varnothing$.

22. Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 3)\}$, então,

☐ $R \circ R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 3)\}$; ☐ $R \circ R = \{1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$;
☐ $R \circ R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (2, 1)\}$; ☒ $R \circ R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$.

22. Se $A = \{a, b, c\}$ e $R = \{(a, b), (a, c), (b, a), (c, c)\}$, então,

☐ $R \circ R = \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, c)\}$; ☐ $R \circ R = \{(a, a), (a, c), (b, b), (c, c)\}$;
☐ $R \circ R = \{(a, a), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c), (b, a)\}$; ☒ $R \circ R = \{(a, a), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c)\}$.

23. Sejam X e Y conjuntos e $f : X \to Y$ uma função tal

$$\exists_{h:Y \to X} : \; h \circ f = \mathrm{id}_X \text{ e } \exists_{g:Y \to X} : f \circ g = \mathrm{id}_Y.$$

Então,

☒ f é bijetiva; ☒ f admite inversa;
☒ $h = g$; ☐ nenhuma das outras afirmações é verdadeira.

23. Sejam A e B conjuntos e $f : A \to B$ uma função tal

$$\exists_{g:B \to A} : \; g \circ f = \mathrm{id}_A \text{ e } \exists_{h:B \to A} : f \circ h = \mathrm{id}_B.$$

Então,

☒ f é bijetiva; ☒ f admite inversa;

☒ $g = h$; ☐ nenhuma das outras afirmações é verdadeira.

24. Para $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b\}$, seja $f : A \to B$ a aplicação definida por $f(1) = a$, $f(2) = a$ e $f(3) = b$. Considere $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ definida por

$$F(X) = \{f(X), B \backslash f(X)\}, \qquad (\forall X \in \mathcal{P}(A)).$$

Então,

☐ $F(\{1, 2\}) = F(\{1, 3\})$; ☒ $F(\varnothing) = F(\{2, 3\})$;

☐ $F^{\leftarrow}(\{\{a\}\}) = \{\{1, 2\}\}$; ☒ $F^{\leftarrow}(\{\{a\}\}) = \varnothing$.

24. Para $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2\}$, seja $f : A \to B$ a aplicação definida por $f(a) = 1$, $f(b) = 1$ e $f(c) = 2$. Considere $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ definida por

$$F(X) = \{f(X), B \backslash f(X)\}, \qquad (\forall X \in \mathcal{P}(A)).$$

Então,

☒ $F(\varnothing) = F(\{b, c\})$; ☐ $F(\{a, b\}) = F(\{a, c\})$;

☒ $F^{\leftarrow}(\{\{1\}\}) = \varnothing$; ☐ $F^{\leftarrow}(\{\{1\}\}) = \{\{a, b\}\}$.

25. Considere a função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f((x, y)) = \begin{cases} x - y & \text{se } y \neq 0 \\ 3 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Então,

☒ f é sobrejetiva e não injetiva; ☐ f é não sobrejetiva e injetiva;

☐ f é sobrejetiva e injetiva; ☐ f é não sobrejetiva e não injetiva.

25. Considere a função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f((x, y)) = \begin{cases} x + y & \text{se } y \neq 0 \\ 2 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Então,

☒ f é sobrejetiva e não injetiva; ☐ f é não sobrejetiva e injetiva;

☐ f é sobrejetiva e injetiva; ☐ f é não sobrejetiva e não injetiva.