Universidade do Minho
Departamento de Matemática

14 de janeiro de 2022

Tópicos de Matemática

Licenciatura em Ciências da Computação

2º teste - versão A

duração: 2 horas

Nome:	**Número:**

Grupo I

Relativamente às questões deste grupo, indique para cada alínea se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), marcando x no quadrado respetivo.

		V	F
1.	A relação binária $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, y = \sqrt{x}\}$ é uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.	☐	☒
2.	A família de conjuntos $\{\{k, k+1\} \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ é uma partição de $\mathbb{Z}$.	☐	☒
3.	Se R é a relação binária em $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ definida por $X\,R\,Y$ *se e só se* $X \setminus Y = \emptyset$, então R é uma relação reflexiva e antissimétrica.	☒	☐
4.	Existe uma relação de equivalência R definida em $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tal que $A/R = \{\{2, 3, 5\}, \{4, 3, 1\}\}$.	☐	☒
5.	Existem conjuntos A, B e C, tais que $A \sim B$ e $A \cup C \nsim B \cup C$.	☒	☐
6.	Os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \setminus \{x \in \mathbb{N} \,|\, x$ é ímpar$\}$ têm o mesmo cardinal.	☒	☐

Grupo II

Para cada uma das questões deste grupo, indique a sua resposta, sem apresentar qualquer justificação, no espaço disponibilizado a seguir à questão.

1. Seja R a relação binária em $\mathbb{N}$ definida por

$$a\,R\,b \text{ se e só se } a - b \geq 3, \text{ para quaisquer } a, b \in \mathbb{N}.$$

Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e S a relação binária em A definida por $S = \{(1, 5), (6, 1), (3, 6), (5, 2)\}$.

(a) Indique $\mathrm{Dom}(R) \setminus \mathrm{Im}(S)$.

Resposta: $\mathrm{Dom}(R) \setminus \mathrm{Im}(S) = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq 4\} \setminus \{1, 5, 6, 2\} = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq 7\}$.

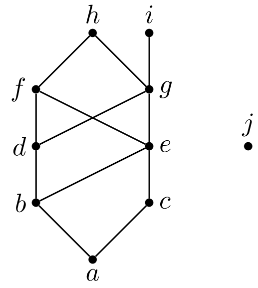
(b) Indique $(R \circ S)^{-1}$.

Resposta: $(R \circ S)^{-1} = (\{(1, 1), (1, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\})^{-1} = \{(1, 1), (2, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$.

(c) Indique a menor relação binária em A que contém S e é transitiva.

Resposta: $\{(1, 5), (6, 1), (3, 6), (5, 2), (1, 2), (6, 5), (6, 2), (3, 1), (3, 5), (3, 2)\}$.

2. Considere o c.p.o. $(P, \leq)$, onde $P = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ e $\leq$ é a relação de ordem definida pelo diagrama de Hasse representado ao lado.



(a) Indique $\leq \cap \{(a, a), (c, a), (b, d), (b, g), (c, h), (f, i), (j, j), (j, i)\}$.

Resposta: $\{(a, a), (b, d), (b, g), (c, h), (j, j)\}$.

(b) Sejam $A = \{a, c, d, g\}$ e $B = \{f, i\}$. Indique, caso exista(m): os majorantes de A, o supremo de A, os minorantes de B e o ínfimo de B.

Resposta: $\text{Maj}(A) = \{g, h, i\}$; $\sup(A) = g$; $\text{Min}(B) = \{a, b, c, d, e\}$; não existe ínfimo de B.

(c) Indique um subconjunto X de P tal que X tem dois elementos maximais e três elementos minimais.

Resposta: $X = \{b, c, e, j\}$.

(d) Indique um subconjunto Y de P com pelo menos 5 elementos e tal que $(Y, \leq_{|_Y})$ seja um reticulado.

Resposta: $Y = \{a, c, e, g, i\}$.

Grupo III

Resolva cada uma das questões deste grupo na folha de exame. Justifique as suas respostas.

1. Considere a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} & \text{se} \quad x \text{ é ímpar e } x \geq 3 \\ |2x| + 2 & \text{se} \quad x \text{ é par ou } x < 3 \end{cases}$$

e seja $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ a função definida por $g(x) = 2x + 1$, para todo $x \in \mathbb{N}$.

(a) Determine:

i. $f(\{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \geq 3 \text{ e } x \text{ é ímpar}\}) \setminus f(\{1, 2, 13\})$.

Tem-se

$$\{f(x) \,|\, x \geq 3 \text{ e } x \text{ é ímpar}\} = \left\{\frac{x-1}{2} \,|\, x \geq 3 \text{ e } x \text{ é ímpar}\right\} = \mathbb{N}.$$

De facto, para todo $x \in \mathbb{Z}$, se $x \geq 3$ e x é ímpar, então $\frac{x-1}{2} \in \mathbb{N}$. Além disso, para todo $y \in \mathbb{N}$, existe $x = 2y + 1$ tal que x é ímpar, $x \geq 3$ e $f(x) = y$.

Por definição de imagem de um conjunto, tem-se

$$f(\{1, 2, 13\}) = \{f(1), f(2), f(13)\} = \{4, 6\},$$

pois: $1 < 3$, logo $f(1) = |2 \times 1| + 2 = 4$; $2 < 3$, logo $f(2) = |2 \times 1| + 2 = 6$; $13 > 3$, logo $f(13) = \frac{13-1}{2} = 6$.

Assim,

$$f(\{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \geq 3 \text{ e } x \text{ é ímpar}\}) \setminus f(\{1, 2, 13\}) = \mathbb{N} \setminus \{4, 6\}.$$

ii. $f^{\leftarrow}(\{1,6\})$.

Por definição de pré-imagem de um conjunto,

$$\begin{aligned}
f^{\leftarrow}(\{1,6\}) &= \{x\in\mathbb{Z}\,|\,f(x)=1\vee f(x)=6\}\\
&= \{x\in\mathbb{Z}\,|\,(\tfrac{x-1}{2}=1\wedge x\geq 3\wedge x \text{ é ímpar})\\
&\qquad \vee(2|x|+2=1\wedge(x<3\vee x\text{ é par}))\\
&\qquad \vee(\tfrac{x-1}{2}=6\wedge x\geq 3\wedge x\text{ é ímpar})\\
&\qquad \vee(2|x|+2=6\wedge(x<3\vee x\text{ é par}))\}\\
&= \{x\in\mathbb{Z}\,|\,(x=3\wedge x\geq 3\wedge x\text{ é ímpar})\\
&\qquad \vee(2|x|=-1\wedge(x<3\vee x\text{ é par}))\\
&\qquad \vee(x=13\wedge x\geq 3\wedge x\text{ é ímpar})\\
&\qquad \vee((x=2\vee x=-2)\wedge(x<3\vee x\text{ é par}))\}\\
&= \{-2,2,3,13\}.
\end{aligned}$$

(b) Diga, justificando, se a função f é injetiva e se é sobrejetiva.

Sejam A e B conjuntos. Uma função $h:A\to B$ diz-se:

- injetiva se, para quaisquer $x,y\in A$,

$$x\neq y\Rightarrow h(x)\neq h(y).$$

- sobrejetiva se, para qualquer $y\in B$, existe $x\in A$ tal que $h(x)=y$, o que equivale a ter $h(A)=B$.

A função f não é injetiva, pois $2,13\in\mathbb{Z}$, $2\neq 13$ e $f(2)=6=f(13)$.

A função f é sobrejetiva, pois f é uma função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{N}$ e $f(\mathbb{Z})=\mathbb{N}$. Da alínea (a) sabe-se que $f(\{x\in\mathbb{Z}\,|\,x\geq 3$ e x é ímpar$\})=\mathbb{N}$. Então, como $\mathbb{N}=f(\{x\in\mathbb{Z}\,|\,x\geq 3$ e x é ímpar$\})\subseteq f(\mathbb{Z})$ e $f(\mathbb{Z})\subseteq\mathbb{N}$ (pois f é uma função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{N}$), tem-se $f(\mathbb{Z})=\mathbb{N}$.

(c) Determine $f\circ g$. Diga, justificando, se g é a inversa de f.

Considerando que o conjunto de chegada de g é igual do domínio de f, a composta $f\circ g$ está definida e é uma função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$. Além disso, para todo $x\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
(f\circ g)(x)=f(g(x)) &= \begin{cases}\dfrac{g(x)-1}{2} & \text{se}\quad g(x)\text{ é ímpar e } g(x)\geq 3\\[2ex] |2g(x)|+2 & \text{se}\quad g(x)\text{ é par ou } g(x)<3\end{cases}\\
&\ \begin{cases} x & \text{se}\quad g(x)\text{ é ímpar e } g(x)\geq 3\\[2ex] |4x+2|+2 & \text{se}\quad g(x)\text{ é par ou } g(x)<3\end{cases}
\end{aligned}$$

Atendendo a que, para todo $x\in\mathbb{N}$, $g(x)$ é ímpar e $g(x)\geq 3$, tem-se $(f\circ g)(x)=x$. Assim,

$$\begin{array}{rcl} f\circ g:\mathbb{N} & \to & \mathbb{N}\\ x & \mapsto & x\end{array}$$

Uma função é invertível se e só se é uma função bijetiva. A função f não é injetiva, logo não é bijetiva e, portanto, não é invertível. Por conseguinte, g não é a inversa de f.

2. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a afirmação seguinte: Para quaisquer conjuntos A, B e C e para quaisquer funções $f:A\to B$ e $g:B\to C$, se a função $g\circ f$ é injetiva, então g é injetiva.

A afirmação é falsa.

Contra-exemplo: Sejam $A=\{1,2\}$, $B=\{4,5,6\}$, $C=\{7,8\}$ e f, g as funções a seguir definidas

$$\begin{array}{rcl} f:A & \to & B\\ 1 & \mapsto & 4\\ 2 & \mapsto & 5\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{rcl} g:A & \to & C\\ 4 & \mapsto & 7\\ 5 & \mapsto & 8\\ 6 & \mapsto & 8\end{array}$$

Então $g\circ f$ é a função definida por

$$\begin{array}{rcl} f:A & \to & C\\ 1 & \mapsto & 7\\ 2 & \mapsto & 8\end{array}$$

A função $g\circ f$ é injetiva ($1\neq 2$ e $(g\circ f)(1)\neq(g\circ f)(2)$), mas a função g não é injetiva ($5\neq 6$ e $g(5)=g(6)$).

3. Seja R a relação de equivalência em $A = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 9\}$ definida por

$$x\,R\,y \text{ se e só se } \exists_{n,m\in\mathbb{N}}\ x^n = y^m.$$

(a) Mostre que a relação R é, efetivamente, transitiva.

Para quaisquer $x, y, z \in A$,

$$\begin{aligned}
(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \quad &\Rightarrow \quad (\exists_{m,n\in\mathbb{N}}\ x^m = y^n) \wedge (\exists_{p,q\in\mathbb{N}}\ y^p = z^q) \\
&\Rightarrow \quad \exists_{m,n,p,q\in\mathbb{N}}\ (x^{mp} = y^{np} \wedge y^{np} = z^{nq}) \\
&\Rightarrow \quad \exists_{m,n,p,q\in\mathbb{N}}\ x^{mp} = z^{nq} \\
&\Rightarrow \quad \exists_{i=mp,j=nq\in\mathbb{N}}\ x^i = z^j \\
&\Rightarrow \quad (x,z) \in R.
\end{aligned}$$

(b) Indique em extensão a classe de equivalência $[2]_R$. Determine o número de elementos de A/R.

Tem-se

$$[2]_R = \{y \in A \mid 2\,R\,y\} = \{y \in A \mid \exists_{m,n\in\mathbb{N}}\ 2^m = y^n\} = \{2,4,8\},$$

pois $2^1 = 2^1$, $2^2 = 4^1$, $2^3 = 8^1$.

Uma vez que $A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$ e

$$\begin{aligned}
&[2]_R = \{2,4,8\} = [4]_R = [8]_R, \\
&[3]_R = \{3,9\} = [9]_R, \\
&[5]_R = \{5\}, \\
&[6]_R = \{6\}, \\
&[7]_R = \{7\},
\end{aligned}$$

conclui-se que o conjunto A/R tem 5 elementos.

4. Seja R uma relação binária definida num conjunto A. Mostre que se R, S e $R \circ S$ são relações simétricas, então $R \circ S = S \circ R$.

Admitamos que as relações R, S e $R \circ S$ são simétricas. Então, para quaisquer $x, y \in A$,

$$\begin{aligned}
(x,y) \in S \circ R \quad &\Leftrightarrow \quad \exists_{z\in A}\,(x,z) \in R \wedge (z,y) \in S && \text{(definição de } S \circ R) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists_{z\in A}\,(z,x) \in R \wedge (y,z) \in S && (R \text{ e } S \text{ são simétricas}) \\
&\Leftrightarrow \quad (y,x) \in R \circ S && \text{(definição de } R \circ S) \\
&\Leftrightarrow \quad (x,y) \in R \circ S && (R \circ S \text{ é simétrica})
\end{aligned}$$

Logo, $R \circ S = S \circ R$.

Resolução alternativa: Admitamos que as relações R, S e $R \circ S$ são simétricas. Então $R = R^{-1}$, $S = S^{-1}$, $R \circ S = (R \circ S)^{-1}$. Logo,

$$R \circ S = (R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1} = S \circ R.$$

Cotações: Grupo I: 6 x 0,75;
Grupo II: 1. (1,0+1,0+0,75); 2. (0,75+1,25+0,75+0,75).
Grupo III: 1. (1,5+1,0+1,25); 2. (1,25); 3. (1,25+1,5) 4. (1,5).