Universidade do Minho
Departamento de Matemática

7 de janeiro de 2020

Tópicos de Matemática

Licenciatura em Ciências da Computação

2º teste

duração: 2 horas

1. Sejam $f : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ e $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ as funções definidas por

$$f((x,y)) = x+y \qquad \text{e} \qquad g(x) = \begin{cases} (0,x) & \text{se } x \geq 0 \\ (x,0) & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

   (a) Determine, justificando:

   i. $g(\{-1,0,1\})$; ii. $f^{\leftarrow}(\{0\})$.

   (b) Diga, justificando, se a aplicação f é injetiva e se é sobrejetiva.

   (c) Justifique que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$. Sem determinar $g \circ f$, justifique que $g \circ f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$.

2. Sejam S e T as relações binárias em $\mathbb{N}$ definidas por

$$S = \{(x,y) \,|\, x,y \in \mathbb{N} \wedge x+1 = 2y\},$$

$$T = \{(1,2),(2,1),(3,5),(5,2)\}.$$

   (a) Determine $\mathrm{Dom}(S) \cap \mathrm{Dom}(T)$.

   (b) Justifique que $S \cap S^{-1} \subseteq id_{\mathbb{N}}$. Conclua que S é antissimétrica.

   (c) Verifique que $T \circ T \nsubseteq T$. Dê exemplo de uma relação binária R em $\mathbb{N}$ tal que $R \neq \omega_{\mathbb{N}}$, $T \subseteq R$ e $R \circ R \subseteq R$.

3. Seja R a relação binária em $A = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \leq 10\}$ definida por

$$x \, R \, y \text{ se e só se } \exists_{k\in\mathbb{Z}}\; y = 2^k x,$$

   para quaisquer $x, y \in A$.

   (a) Sabendo que R é reflexiva e simétrica, justifique que R é uma relação de equivalência em A.

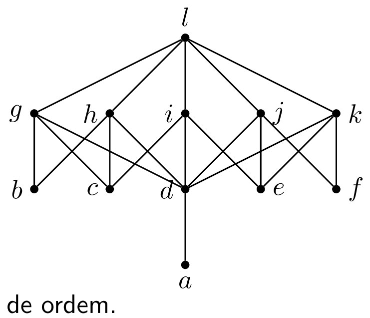
   (b) Determine $[1]_R$ e A/R.

4. Sejam A um conjunto e Π uma partição de A. Seja R_Π a relação de equivalência em A determinada por Π, i.e., R_Π é a relação binária em A definida por

$$(a,b) \in R_\Pi \text{ se e só se } \exists_{S\in\Pi}\; a,b \in S.$$

   Mostre que, para quaisquer $X \in \Pi$ e $x \in X$, $[x]_{R_\Pi} = X$.

5. Considere o c.p.o. $(A, \leq)$ com o seguinte diagrama de Hasse associado:



   Indique, caso exista(m):

   (a) os elementos maximais, os elementos minimais, o máximo e o mínimo de A.

   (b) $\inf(\{h,i,j\})$, $\sup(\{d,e,f\})$, $\inf(\emptyset)$ e $\sup(\emptyset)$.

   (c) um subconjunto X de A tal que $(X, \leq_{|X})$ não seja uma cadeia e seja um reticulado.

   (d) uma relação de ordem $\leq'$ em A tal que $\leq \cup \leq'$ não seja uma relação de ordem.

6. Sejam A e B conjuntos. Mostre que se A é um conjunto não contável e B é um conjunto não vazio, então $A \times B$ não é contável.

Cotação: 1-(1,5+1,5+1,5); 2-(1,5+1,5+1,5); 3-(1,5+1,5); 4-(1,5); 5-(1,0+1,5+1,0+1,0); 6-(2,0).