Universidade do Minho
Departamento de Matemática

7 de janeiro de 2020

Tópicos de Matemática

Licenciatura em Ciências da Computação

2º teste

duração: 2 horas

1. **Sejam $f : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ e $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ as funções definidas por**

$$f((x,y)) = x+y \qquad \textbf{e} \qquad g(x) = \begin{cases} (0,x) & \textbf{se } x \geq 0 \\ (x,0) & \textbf{se } x < 0 \end{cases}.$$

(a) **Determine, justificando:**

i. $g(\{-1,0,1\}))$.

Uma vez que $g(\{-1,0,1\})) = \{g(-1), g(0), g(1)\}$ e

$$g(-1) = (0,-1), g(0) = (0,0), g(1) = (1,0)$$

tem-se $g(\{-1,0,1\})) = \{(0,-1),(0,0),(1,0)\}$.

ii. $f^{\leftarrow}(\{0\})$.

Tem-se

$$f^{\leftarrow}(\{0\}) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \,|\, f((x,y)) = 0\},$$

então, atendendo a que

$$f((x,y)) = 0 \Leftrightarrow x+y = 0 \Leftrightarrow y = -x,$$

segue que

$$f^{\leftarrow}(\{0\}) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \,|\, y = -x\} = \{(x,-x) \,|\, x \in \mathbb{Z}\}.$$

(b) **Diga, justificando, se a aplicação f é injetiva e se é sobrejetiva.**

A aplicação f é injetiva se, para quaisquer $(x,y),(z,w) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$,

$$f((x,y)) = f((z,w)) \Rightarrow (x,y) = (z,w).$$

Ora, atendendo a que

$$f((-1,1)) = f((1,-1)) \text{ e } (-1,1) \neq (1,-1),$$

a aplicação f não é injetiva.

A aplicação f é sobrejetiva se, para qualquer $z \in \mathbb{Z}$, existe $(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tal que $f((x,y)) = z$. Uma vez que, para todo $z \in \mathbb{Z}$, existe $(0,z) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tal que $f((0,z)) = z$, concluímos que a aplicação f é sobrejetiva.

(c) **Justifique que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$. Sem determinar $g \circ f$, justifique que $g \circ f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$.**

Uma vez que o codomínio de g coincide com o domínio de f, a composta de f com g está definida e $f \circ g$ é uma função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$. Além disso, para qualquer $x \in \mathbb{Z}$,

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} f((0,x)) & \text{se } x \geq 0 \\ f((x,0)) & \text{se } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ x & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

pelo que, para todo $x \in \mathbb{Z}$, $(f \circ g)(x) = x$.

A função $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ é definida por

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{id}_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

Uma vez que as funções $f \circ g$ e $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ têm o mesmo domínio e o mesmo conjunto de chegada e, para todo $x \in \mathbb{Z}$, $(f \circ g)(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}(x)$, então $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$.

Se admitirmos que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$, então, atendendo a que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$, segue que f é uma função invertível e, portanto, bijetiva. Ora, pela alínea (b) sabe-se que a função f não é bijetiva, pois não é injetiva. Logo $g \circ f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$.

2. **Sejam S e T as relações binárias em $\mathbb{N}$ definidas por**

$$S = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{N} \wedge x+1 = 2y\},$$
$$T = \{(1,2),(2,1),(3,5),(5,2)\}.$$

(a) **Determine $\mathrm{Dom}(S) \cap \mathrm{Dom}(T)$.**

Um vez que

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Dom}(S) & = & \{x \in \mathbb{N} \mid \exists_{y \in \mathbb{N}}\ (x,y) \in S\} \\ & = & \{x \in \mathbb{N} \mid \exists_{y \in \mathbb{N}}\ x+1 = 2y\} \\ & = & \{x \in \mathbb{N} \mid \exists_{y \in \mathbb{N}}\ x = 2y-1\} \\ & = & \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é ímpar}\} \end{array}$$

e

$$\mathrm{Dom}(T) = \{x \in \mathbb{N} \mid\ \exists_{y \in \mathbb{N}}\ (x,y) \in T\} = \{1,2,3,5\},$$

tem-se

$$\mathrm{Dom}(S) \cap \mathrm{Dom}(T) = \{1,3,5\}.$$

(b) **Justifique que $S \cap S^{-1} \subseteq id_{\mathbb{N}}$. Conclua que S é antissimétrica.**

Para qualquer $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tem-se

$$\begin{array}{rcl} (a,b) \in S \cap S^{-1} & \Leftrightarrow & (a,b) \in S \wedge (a,b) \in S^{-1} \\ & \Leftrightarrow & (a,b) \in S \wedge (b,a) \in S^{-1} \\ & \Leftrightarrow & a+1 = 2b \wedge b+1 = 2a \\ & \Leftrightarrow & a = b = 1. \end{array}$$

Logo $S \cap S^{-1} = \{(1,1)\} \subseteq id_{\mathbb{N}}$.

Uma relação binária ρ definida num conjunto A é antissimétrica se e só se $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq id_A$. Então, atendendo a que S é uma relação binária em $\mathbb{N}$ e $S \cap S^{-1} \subseteq id_{\mathbb{N}}$, concluímos que a relação S é antissimétrica.

(c) **Verifique que $T \circ T \nsubseteq T$. Dê exemplo de uma relação binária R em $\mathbb{N}$ tal que $R \neq \omega_{\mathbb{N}}$, $T \subseteq R$ e $R \circ R \subseteq R$.**

Tem-se

$$\begin{array}{rcl} T \circ T & = & \{(a,c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists_{b \in \mathbb{N}}\ (a,b) \in T \wedge (b,c) \in T\} \\ & = & \{(1,1),(2,2),(3,2),(5,1)\}. \end{array}$$

Então, como $(1,1) \in T \circ T$ e $(1,1) \notin T$, $T \circ T \nsubseteq T$.

Dada uma relação binária ρ definida num conjunto A, tem-se $\rho \circ \rho \subseteq \rho$ se e só se ρ é transitiva. Sendo assim, pretende-se determinar uma relação binária R em $\mathbb{N}$ tal que $R \neq \omega_{\mathbb{N}}$, $T \subseteq R$ e R seja transitiva. Para que $T \subseteq R$ e R seja transitiva, é necessário ter $T \cup T \circ T \subseteq R$, ou seja, é necessário ter $T \cup \{(1,1),(2,2),(3,2),(5,1)\} \subseteq R$. A relação $R' = T \cup \{(1,1),(2,2),(3,2),(5,1)\}$ não é transitiva, pois $(3,5),(5,1) \in R'$ e $(3,1) \notin R'$. Assim, $(3,1)$ tem de pertencer a R. A relação $R = T \cup \{(1,1),(2,2),(3,2),(5,1)\} \cup \{(3,1)\}$ é uma relação transitiva e tem-se $R \circ R \subseteq R$; de facto,

$$R \circ R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(5,1),(5,2)\} \subseteq R.$$

Claramente, tem-se $R \neq \omega_{\mathbb{N}} = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$, pois $(3,3) \in \omega_{\mathbb{N}}$ e $(3,3) \notin R$.

3. **Seja R a relação binária em $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 10\}$ definida por**

$$x\, R\, y \textbf{ se e só se } \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ y = 2^k x,$$

para quaisquer $x, y \in A$.

(a) **Sabendo que R é reflexiva e simétrica, justifique que R é uma relação de equivalência em A.**

Uma relação binária R definida num conjunto A diz-se uma relação de quivalência se é uma relação reflexiva, simétrica e transitiva. Assim, uma vez que é dito que R é reflexiva e simétrica, resta provar que R é uma relação transitiva.
Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\begin{array}{rcl} a\, R\, b \wedge b\, R\, c & \Rightarrow & \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ b = 2^k a\ \wedge\ \exists_{k' \in \mathbb{Z}}\ c = 2^{k'} b \\ & \Rightarrow & \exists_{k,k' \in \mathbb{Z}}\ c = 2^{k'}(2^k a) \\ & \Rightarrow & \exists_{k,k' \in \mathbb{Z}}\ c = 2^{k'+k} a \\ & \Rightarrow & \exists_{j=k+k' \in \mathbb{Z}}\ c = 2^j a \\ & \Rightarrow & a\, R\, c. \end{array}$$

e, portanto, R é transitiva.

(b) **Determine $[1]_R$ e A/R.**

Tem-se

$$\begin{array}{rcl} [1]_R & = & \{y \mid y \in A \wedge 1\, R\, y\} \\ & = & \{y \mid y \in A \wedge y = 2^k \times 1, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\} \\ & = & \{1,2,4,8\} = [2]_R = [4]_R = [8]_R. \end{array}$$

Uma vez que

$$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$$

e

$$[3]_R = \{3,6\} = [6]_R, [5]_R = \{5,10\} = [10]_R, [7]_R = \{7\}, [9]_R = \{9\},$$

tem-se

$$A/R = \{[1]_R, [3]_R, [5]_R, [7]_R, [9]_R\} = \{\{1,2,4,8\}, \{3,6\}, \{5,10\}, \{7\}, \{9\}\}.$$

4. **Sejam A um conjunto e Π uma partição de A. Seja R_Π a relação de equivalência em A determinada por Π, i.e., R_Π é a relação binária em A definida por**

$$(a,b) \in R_\Pi \textbf{ se e só se } \exists_{S\in\Pi}\ a,b \in S.$$

Mostre que, para quaisquer $X \in \Pi$ e $x \in X$, $[x]_{R_\Pi} = X$.

Dado um conjunto A, diz-se que Π é uma partição de A se as condições seguintes são satisfeitas:

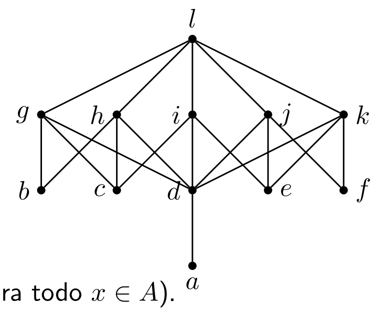
(i) $\forall C \in \Pi,\ C \neq \emptyset$.

(ii) $\forall_{C,D\in\Pi}\ (C \neq D \Rightarrow C \cap D = \emptyset)$.

(iii) $\forall_{x\in A}\ \exists_{C\in\Pi}\ x \in C$.

Seja $y \in [x]_{R_\Pi}$. Então $x\, R_\Pi\, y$ e, por definição de R_Π, existe $S \in \Pi$ tal que $x, y \in S$. Atendendo a que $x \in X$, $x \in S$, $X, S \in \Pi$ e Π é uma partição de A, tem-se $X = S$ (considerando (ii)). Logo $y \in X$ e, portanto, $[x]_{R_\Pi} \subseteq X$. Reciprocamente, se $y \in X$, então, pela definição de R_Π e tendo em conta que $x \in X$, tem-se $x\, R_\Pi\, y$; assim, $y \in [x]_{R_\Pi}$ e, portanto, $X \subseteq [x]_{R_\Pi}$. Desta forma, provámos que $[x]_{R_\Pi} = X$.

5. **Considere o c.p.o. $(A, \leq)$ com o seguinte diagrama de Hasse associado:**



Indique, caso exista(m):

(a) **os elementos maximais, os elementos minimais, o máximo e o mínimo de A.**

Maximais de A: l.
Minimais de A: b, c, a, e, f.
Máximo de A: l.
Mínimo de A: não existe (note-se que não existe $m \in A$ tal que $m \leq x$, para todo $x \in A$).

(b) $\inf(\{h,i,j\})$, $\sup(\{d,e,f\})$, $\inf(\emptyset)$ **e** $\sup(\emptyset)$.

Tem-se $\mathrm{Min}(\{h,i,j\}) = \{d,a\}$. O elemento máximo do conjunto dos minorantes de $\{h,i,j\}$ é o elemento d; logo $\inf(\{h,i,j\}) = d$.

Uma vez que $\mathrm{Maj}(\{d,e,f\}) = \{i,k,l\}$ e o conjunto dos minorantes de $\{d,e,f\}$ não tem elemento mínimo, então não existe supremo de $\{d,e,f\}$.

Tem-se $\mathrm{Min}(\emptyset) = A$; o elemento máximo do conjunto A é o elemento l, logo $\inf(\emptyset) = l$.

Atendendo a que $\mathrm{Maj}(\emptyset) = A$ e o conjunto A não tem elemento mínimo, então não existe o supremo do conjunto vazio.

(c) **um subconjunto X de A tal que $(X, \leq_{|X})$ não seja uma cadeia e seja um reticulado.**

Um c.p.o $(P, \leq)$ diz-se uma cadeia se, para quaisquer $x, y \in P$, tem-se $x \leq y$ ou $y \leq x$. Um c.p.o $(P, \leq)$ diz-se um reticulado se, para quaisquer $x, y \in P$, existem o supremo e o infímo de $\{x, y\}$.
Seja $X = \{d, h, j, l\}$. O c.p.o. $(X, \leq_{|X})$ é um reticulado e não é uma cadeia.

(d) **uma relação de ordem $\leq'$ em A tal que $\leq \cup \leq'$ não seja uma relação de ordem.**

Seja $\leq' = id_A \cup \{(d,a)\}$. A relação $\leq'$ é uma relação de ordem em A e $\leq \cup \leq'$ não é uma relação de ordem em A, pois não é antissimétrica ($(a,d) \in \leq \cup \leq'$, $(d,a) \in \leq \cup \leq'$ e $a \neq d$).

6. **Sejam A e B conjuntos. Mostre que se A é um conjunto não contável e B é um conjunto não vazio, então $A \times B$ não é contável.**

No sentido de fazer a prova por redução ao absurdo, admitamos que A não é contável, $B \neq \emptyset$ e $A \times B$ é contável. Uma vez que $A \times B$ é contável, existe uma função injetiva de $A \times B$ em $\mathbb{N}$; seja $f : A \times B \to \mathbb{N}$ uma dessas funções. Dado que $B \neq \emptyset$, existe $b \in B$, pelo que podemos considerar a função $g : A \to A \times B$ definida por $g(a) = (a, b)$. A função g é injetiva. Então, como f e g são funções injetivas, a função $f \circ g : A \to \mathbb{N}$ é também injetiva; logo o conjunto A é contável (contradição). Assim, se A é um conjunto não contável e B é um conjunto não vazio, o conjunto $A \times B$ não é contável.

Cotação: 1-(1,5+1,5+1,5); 2-(1,5+1,5+1,5); 3-(1,5+1,5); 4-(1,5); 5-(1,0+1,5+1,0+1,0); 6-(2,0).