Tópicos de Matemática

2º teste (3 de janeiro de 2018) — duração: 2h00

1. Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ a função definida por

$$f(n) = \begin{cases} (2n, 2n+1) & \text{se } n \geq 0 \\ (-2n, -2n+1) & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

   (a) Determine $f(\{1, -1, 0\})$ e $f^{\leftarrow}(\{(2,3), (2,5)\}$.
   Diga se existe algum conjunto $A \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que $f^{\leftarrow}(A) = \{1\}$. Justifique.

   (b) Diga, justificando, se f é injetiva e se f é sobrejetiva.

2. Seja $f : A \to B$ uma função sobrejetiva. Mostre que se $\{Y_i\}_{i \in I}$ é uma partição de B, então $\{f^{\leftarrow}(Y_i)\}_{i \in I}$ é uma partição de A.

3. Sejam S e T as relações binárias em $\mathbb{N}$ definidas por

$$S = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid \exists_{k \in \mathbb{N}} \ b - a = 5k\} \quad \text{e} \quad T = \{(4,7), (3,5), (4,2)\}.$$

   (a) Determine $\mathrm{Dom}(S)$ e $\mathrm{Im}(S)$.

   (b) Diga, justificando, se a relação S é: (i) simétrica; (ii) transitiva.

   (c) Determine $T \circ T^{-1}$. Diga se $T \circ T^{-1} \subseteq S$. Justifique a sua resposta.

4. Seja θ a relação de equivalência em $\mathbb{R}$ definida por

$$x \, \theta \, y \text{ se e só se } x - y \in \mathbb{Z}.$$

   (a) Indique três elementos distintos da classe $\left[\frac{1}{2}\right]_\theta$. Determine a classe de equivalência $[0]_\theta$.

   (b) Dê um exemplo, ou justifique que não existe um exemplo, de elementos a e b tais que:

      i. $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq b$ e $[a]_\theta \cap [b]_\theta = \emptyset$.

      ii. $a, b \in \mathbb{R}$, $[a]_\theta \neq [b]_\theta$ e $[2a]_\theta = [2b]_\theta$.

5. Considere o c.p.o (A, ρ), onde $A = \{(1,3), (2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (4,4), (5,1)\}$ e ρ é a relação de ordem parcial em A definida por $(a,b)\rho(c,d)$ se e só se $a \leq c$ e $b \leq d$.

   (a) Diga, justificando, se o c.p.o. (A, ρ) é uma cadeia.

   (b) Desenhe o diagrama de Hasse de (A, ρ).

   (c) Indique os elementos maximais e minimais de A.

   (d) Indique, caso existam, $\sup(\{(1,3), (2,4), (3,2)\})$ e $\inf(\{(1,3), (2,4), (3,2)\})$. Justifique.

6. Diga, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras para quaisquer conjuntos não vazios A, B e C.

   (a) Se $A \times C \sim B \times C$, então $A \sim B$.

   (b) Se $A \cup B$ é numerável, então A é numerável ou B é numerável.

Cotação: 1-(1,75+1,0); 2-(2,0); 3-(1,5+1,75+1,5); 4-(1,5+1,0+1,0); 5-(1,0+1,0+1,0+1,5); 6-(1,25+1,25).