

Tópicos de Matemática

2º teste (3 de janeiro de 2018) — duração: 2h00

1. **Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ a função definida por**

$$f(n) = \begin{cases} (2n, 2n+1) & \textbf{se } n \geq 0 \\ (-2n, -2n+1) & \textbf{se } n < 0 \end{cases}$$

(a) **Determine $f(\{1, -1, 0\})$ e $f^{\leftarrow}(\{(2,3),(2,5)\}$.**
Diga se existe algum conjunto $A \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que $f^{\leftarrow}(A) = \{1\}$. Justifique.

Por definição de imagem de um conjunto tem-se

$$f(\{-1, 1, 0\}) = \{f(-1), f(1), f(0)\}$$

e da definição da função f segue que

$$\begin{array}{ll} f(-1) = (-2 \times (-1), -2 \times (-1) + 1) = (2,3) & (\text{pois } -1 < 0) \\ f(1) = (2 \times 1, 2 \times 1 + 1) = (2,3) & (\text{pois } 1 \geq 0) \\ f(0) = (2 \times 0, 2 \times 0 + 1) = (0,1) & (\text{pois } 1 \geq 0). \end{array}$$

Logo

$$f(\{-1, 1, 0\}) = \{(2,3), (0,1)\}.$$

Por definição de pré-imagem de um conjunto e atendendo à definição da função f, tem-se

$$\begin{array}{rcl} f^{\leftarrow}(\{(2,3),(2,5)\}) & = & \{n \in \mathbb{Z} \,|\, f(n) = (2,3) \vee f(n) = (2,5)\} \\ & = & \{n \in \mathbb{Z} \,|\, f(n) = (2,3)\} \cup \{n \in \mathbb{Z} \,|\, f(n) = (2,5)\}, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \{n \in \mathbb{Z} \,|\, f(n) = (2,3)\} & = & \{n \in \mathbb{Z} \,|\, ((2n, 2n+1) = (2,3) \wedge n \geq 0) \vee ((-2n, -2n+1) = (2,3) \wedge n < 0)\} \\ & = & \{n \in \mathbb{Z} \,|\, (2n = 2 \wedge 2n+1 = 3 \wedge n \geq 0) \vee (-2n = 2 \wedge -2n+1 = 3 \wedge n < 0)\} \\ & = & \{n \in \mathbb{Z} \,|\, (n = 1 \wedge n \geq 0) \vee (n = -1 \wedge n < 0)\} \\ & = & \{-1, 1\}, \\ \{n \in \mathbb{Z} \,|\, f(n) = (2,5)\}) & = & \{n \in \mathbb{Z} \,|\, ((2n, 2n+1) = (2,5) \wedge n \geq 0) \vee ((-2n, -2n+1) = (2,5) \wedge n < 0)\} \\ & = & \{n \in \mathbb{Z} \,|\, (2n = 2 \wedge 2n+1 = 5 \wedge n \geq 0) \vee (-2n = 2 \wedge -2n+1 = 5 \wedge n < 0)\} \\ & = & \{n \in \mathbb{Z} \,|\, (n = 1 \wedge n = 2 \wedge n \geq 0) \vee (n = -1 \wedge n = -2 \wedge n < 0)\} \\ & = & \emptyset. \end{array}$$

Portanto,

$$f^{\leftarrow}(\{(2,3),(2,5)\}) = \{-1, 1\} \cup \emptyset = \{-1, 1\}.$$

Dos cálculos anteriores conclui-se facilmente que não existe qualquer conjunto $A \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que $f^{\leftarrow}(A) = \{1\}$. De facto, se admitirmos que existe um conjunto A nas condições indicadas, tem-se $f(1) \in A$. Então $(2,3) \in A$ e, uma vez que $f(1) = f(-1) = (2,3)$, segue que $\{-1, 1\} \subseteq f^{\leftarrow}(A)$. Logo não existe qualquer conjunto A tal que $f^{\leftarrow}(A) = \{1\}$.

(b) **Diga, justificando, se f é injetiva e se f é sobrejetiva.**

Uma função $f : A \to B$ diz-se injetiva se a proposição

$$\forall_{a,b \in A} \;\; a \neq b \to f(a) \neq f(b)$$

é verdadeira.

Atendendo a que $1 \neq -1$ e $f(1) = (2,3) = f(-1)$, concluímos que a função f não é injetiva.

Uma função $f : A \to B$ diz-se sobrejetiva se a proposição

$$\forall_{b \in B} \; \exists_{a \in A} \;\; f(a) = b$$

é verdadeira.

Ora, da resolução da alínea anterior é simples concluir que a função f não é sobrejetiva, pois $(2,5) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e não existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f(n) = (2,5)$.

2. **Seja $f : A \to B$ uma função sobrejetiva. Mostre que se $\{Y_i\}_{i\in I}$ é uma partição de B, então $\{f^{\leftarrow}(Y_i)\}_{i\in I}$ é uma partição de A.**

Sejam $f : A \to B$ uma função sobrejetiva e $\{Y_i\}_{i\in I}$ uma partição de B.

Uma vez que f é sobrejetiva, para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

Atendendo a que $\{Y_i\}_{i\in I}$ é uma partição de B, então:

[P1] Para todo $i \in I$, $Y_i \neq \emptyset$;

[P2] Para quaisquer $i, j \in I$, $Y_i \neq Y_j \Rightarrow Y_i \cap Y_j = \emptyset$;

[P3] $\displaystyle\bigcup_{i\in I} Y_i = B$.

Das hipóteses anteriores segue que $\{f^{\leftarrow}(Y_i)\}_{i\in I}$ é uma partição de A, ou seja, que:

[Q1] Para todo $i \in I$, $f^{\leftarrow}(Y_i) \neq \emptyset$;

[Q2] Para quaisquer $i, j \in I$, $f^{\leftarrow}(Y_i) \neq f^{\leftarrow}(Y_j) \Rightarrow f^{\leftarrow}(Y_i) \cap f^{\leftarrow}(Y_j) = \emptyset$;

[Q3] $\displaystyle\bigcup_{i\in I} f^{\leftarrow}(Y_i) = A$.

De facto:

[Q1] Uma vez que, para todo $i \in I$, $Y_i \subseteq B$ e, para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$, então, para todo $i \in I$ e para todo $b \in Y_i$, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Logo, para todo $i \in I$, existe $a \in A$ tal que $a \in f^{\leftarrow}(Y_i)$ e, portanto, $f^{\leftarrow}(Y_i) \neq \emptyset$.

[Q2] Sejam $i, j \in I$ tais que $f^{\leftarrow}(Y_i) \neq f^{\leftarrow}(Y_j)$. Então $Y_i \neq Y_j$ (se $Y_i = Y_j$, tem-se $f^{\leftarrow}(Y_i) = f^{\leftarrow}(Y_j)$). Por redução ao absurdo, admitamos que $f^{\leftarrow}(Y_i) \cap f^{\leftarrow}(Y_j) \neq \emptyset$. Então existe $a \in A$ tal que $a \in f^{\leftarrow}(Y_i)$ e $a \in f^{\leftarrow}(Y_j)$, donde segue que $f(a) \in Y_i$ e $f(a) \in Y_j$ e, portanto, $Y_i \cap Y_j \neq \emptyset$ (o que contradiz P2, uma vez que $Y_i \neq Y_j$).

[Q3] Claramente, tem-se $\bigcup_{i\in I} f^{\leftarrow}(Y_i) \subseteq A$. A inclusão contrária também se verifica. Com efeito, para todo $a \in A$, $f(a) \in B$, pois f é uma função de A em B. Então de [P3] segue que $f(a) \in Y_j$, para algum $j \in I$ e, portanto, $a \in f^{\leftarrow}(Y_j)$. Logo $a \in \bigcup_{i\in I} f^{\leftarrow}(Y_i)$. Assim, $A \subseteq \bigcup_{i\in I} f^{\leftarrow}(Y_i)$. Das duas inclusões segue que $\displaystyle\bigcup_{i\in I} f^{\leftarrow}(Y_i) = A$.

3. **Sejam S e T as relações binárias em $\mathbb{N}$ definidas por**

$$S = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid \exists_{k\in\mathbb{N}}\ b - a = 5k\} \quad \textbf{e} \quad T = \{(4, 7), (3, 5), (4, 2)\}.$$

(a) **Determine $\mathrm{Dom}(S)$ e $\mathrm{Im}(S)$.**

Atendendo a que

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}(S) &= \{a \in \mathbb{N} \mid \exists_{b\in\mathbb{N}}\ (a, b) \in S\} \\ &= \{a \in \mathbb{N} \mid \exists_{b\in\mathbb{N}}\exists_{k\in\mathbb{N}}\ a = b - 5k\}, \end{aligned}$$

é imediato que $\mathrm{Dom}(S) \subseteq \mathbb{N}$. A inclusão contrária também é válida, pois, para todo $a \in \mathbb{N}$, existem $k = 1 \in \mathbb{N}$ e $b = a + 5 \times k \in \mathbb{N}$ tais que $(a, b) \in S$. Assim, para todo $a \in \mathbb{N}$, $a \in \mathrm{Dom}(S)$ e, portanto, $\mathbb{N} \subseteq \mathrm{Dom}(S)$. Logo $\mathrm{Dom}(S) = \mathbb{N}$.

Uma vez que

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(S) &= \{b \in \mathbb{N} \mid \exists_{a\in\mathbb{N}}\ (a, b) \in S\} \\ &= \{b \in \mathbb{N} \mid \exists_{a\in\mathbb{N}}\exists_{k\in\mathbb{N}}\ b = a + 5k\}, \end{aligned}$$

é imediato que $\mathrm{Im}(S) \subseteq \mathbb{N}$. Atendendo a que, para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $b < 5$, $(a, b) \notin S$ (pois $b \neq a + 5k$, para todo $k \in \mathbb{N}$), então $\mathrm{Im}(S) \subseteq \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Para todo $b \in \mathbb{N}$ tal que $b > 5$, existem $k = 1 \in \mathbb{N}$ e $a = b - 5k \in \mathbb{N}$ tais que $(a, b) \in S$. Logo, para todo $b \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $b \in \mathrm{Im}(S)$. Assim, $(\mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5\}) \subseteq \mathrm{Im}(S)$. Portanto, $\mathrm{Im}(S) = \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

(b) **Diga, justificando, se a relação S é:**

(i) simétrica;

Uma relação binária ρ num conjunto A diz-se simétrica se, para quaisquer $a, b \in A$,

$$(a, b) \in \rho \Rightarrow (b, a) \in \rho.$$

A relação S não é simétrica. De facto, $(1,6) \in S$ (pois $6-1=5\times 1$ e $1 \in \mathbb{N}$), mas $(6,1) \notin S$ (uma vez que $1-6 \neq 5k$, para todo $k \in \mathbb{N}$).

(ii) transitiva.

Uma relação binária ρ num conjunto A diz-se transitiva se, para quaisquer $a,b,c \in A$,

$$((a,b) \in \rho \wedge (b,c) \in \rho) \Rightarrow (a,c) \in \rho.$$

A relação S é transitiva, pois, para quaisquer $a,b,c \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} ((a,b) \in S \wedge (b,c) \in S) &\Rightarrow (\exists_{k_1 \in \mathbb{N}}\ b-a=5k_1) \wedge (\exists_{k_2 \in \mathbb{N}}\ c-b=5k_2) \\ &\Rightarrow \exists_{k_1,k_2 \in \mathbb{N}}\ c-a=5(k_1+k_2) \\ &\Rightarrow \exists_{j=k_1+k_2 \in \mathbb{N}}\ c-a=5j \\ &\Rightarrow (a,c) \in S. \end{aligned}$$

(c) **Determine $T \circ T^{-1}$. Diga se $T \circ T^{-1} \subseteq S$. Justifique a sua resposta.**

Tem-se

$$T^{-1} = \{(b,a) \in \mathbb{N}^2 \,|\, (a,b) \in T\} = \{(7,4),(5,3),(2,4)\}.$$

Logo

$$\begin{aligned} T \circ T^{-1} &= \{(a,c) \in \mathbb{N}^2 \,|\, \exists_{b \in \mathbb{N}}\ (a,b) \in T^{-1} \wedge (b,c) \in T\} \\ &= \{(7,7),(7,2),(5,5),(2,2),(2,7)\}. \end{aligned}$$

$[(7,4) \in T^{-1}$ e $(4,7) \in T,$ logo $(7,7) \in T \circ T^{-1};$
$(7,4) \in T^{-1}$ e $(4,2) \in T,$ logo $(7,2) \in T \circ T^{-1};$
$(5,3) \in T^{-1}$ e $(3,5) \in T,$ logo $(5,5) \in T \circ T^{-1};$
$(2,4) \in T^{-1}$ e $(4,7) \in T,$ logo $(2,7) \in T \circ T^{-1};$
$(2,4) \in T^{-1}$ e $(4,2) \in T,$ logo $(2,2) \in T \circ T^{-1}.]$

Uma vez que $(7,7) \in T \circ T^{-1}$ e $(7,7) \notin S$ (pois $7-7=0 \neq 5k$, para todo $k \in \mathbb{N}$), então $T \circ T^{-1} \not\subseteq S$.

4. **Seja θ a relação de equivalência em $\mathbb{R}$ definida por**

$$x\,\theta\,y \textbf{ se e só se } x-y \in \mathbb{Z}.$$

(a) **Indique três elementos distintos da classe $\left[\frac{1}{2}\right]_\theta$. Determine a classe de equivalência $[0]_\theta$.**

Uma vez que

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2}\right]_\theta &= \{y \in \mathbb{R} \,|\, \tfrac{1}{2}\theta y\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \,|\, \tfrac{1}{2}-y \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

e $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0 \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1 \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2}-\frac{5}{2}=-2 \in \mathbb{Z}$, então $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{3}{2}$ e $\dfrac{5}{2}$ são elementos de $\left[\dfrac{1}{2}\right]_\theta$.

$[0]_\theta = \{y \in \mathbb{R} \,|\, 0\theta y\} = \{y \in \mathbb{R} \,|\, 0-y \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}.$

(b) **Dê um exemplo, ou justifique que não existe um exemplo, de elementos a e b tais que:**

i. $a,b \in \mathbb{Z}$**,** $a \neq b$ **e** $[a]_\theta \cap [b]_\theta = \emptyset$**.**

Uma vez que θ é uma relação de equivalência, para quaisquer $x,y \in \mathbb{R}$, tem-se

$$[x]_\theta = [y]_\theta \text{ se e só se } x\theta y.$$

Da resolução da alínea anterior sabe-se que, para qualquer inteiro x, $0\,\theta\,x$. Logo, para qualquer inteiro x, $[x]_\theta = [0]_\theta = \mathbb{Z}$. Assim, não existem inteiros a e b tais que $[a]_\theta \cap [b]_\theta = \emptyset$.

ii. $a,b \in \mathbb{R}$**,** $[a]_\theta \neq [b]_\theta$ **e** $[2a]_\theta = [2b]_\theta$**.**

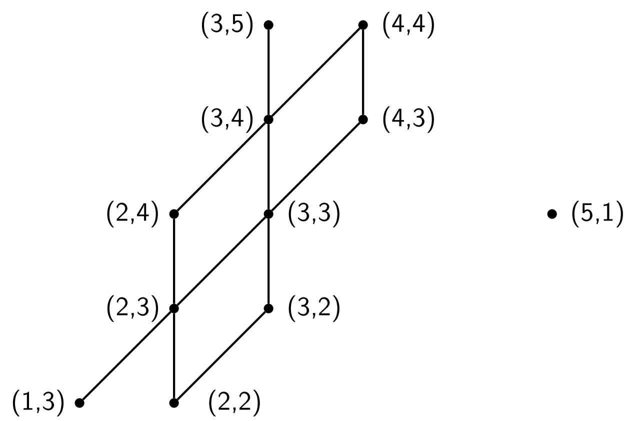
Sejam $a=1$ e $b=\frac{1}{2}$. Então $[a]_\theta \neq [b]_\theta$, pois $a-b \notin \mathbb{Z}$ e, portanto, $(a,b) \notin \theta$. No entanto, $[2a]_\theta = [2b]_\theta$, pois $2a\,\theta\,2b$ $(2a-2b \in \mathbb{Z})$.

5. **Considere o c.p.o (A, ρ), onde $A = \{(1,3),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(4,3),(4,4),(5,1)\}$ e ρ é a relação de ordem parcial em A definida por $(a,b)\rho(c,d)$ se e só se $a \leq c$ e $b \leq d$.**

   (a) **Diga, justificando, se o c.p.o. (A, ρ) é uma cadeia.**

   Um c.p.o. $(P, \leq)$ diz-se uma cadeia se, para quaisquer $a, b \in P$, $(a,b) \in \leq$ ou $(b,a) \in \leq$.
   Uma vez que $(1,3),(2,2) \in A$, $((1,3),(2,2)) \notin \rho$ e $((2,2),(1,3)) \notin \rho$, então (A, ρ) não é uma cadeia.

   (b) **Desenhe o diagrama de Hasse de (A, ρ).**



   (c) **Indique os elementos maximais e minimais de A.**

   Dados um c.p.o. $(P, \leq)$, $X \subseteq P$ e $m \in P$, diz-se que:

   - m é um elemento maximal de X se não existe $x \in X \setminus \{m\}$ tal que $m \leq x$;
   - m é um elemento minimal de X se não existe $x \in X \setminus \{m\}$ tal que $x \leq m$.

   Atendendo a que:

   - para todo $m \in \{(3,5),(4,4),(5,1)\}$, não existe não existe $x \in A \setminus \{m\}$ tal que $m\,\rho\,x$;
   - para todo $a \in A \setminus \{(3,5),(4,4),(5,1)\}$, existe $x \in A \setminus \{a\}$ tal que $a \rho x$,

   então $(3,5)$, $(4,4)$ e $(5,1)$ são os elementos maximais de A.

   Uma vez que

   - para todo $m \in \{(1,3),(2,2),(5,1)\}$, não existe $x \in A \setminus \{m\}$ tal que $x\,\rho\,m$;
   - para todo $a \in A \setminus \{(1,3),(2,2),(5,1)\}$, existe $x \in A \setminus \{a\}$ tal que $x\,\rho\,a$,

   então $(1,3)$, $(2,2)$ e $(5,1)$ são os elementos minimais de A.

   (d) **Indique, caso existam, $\sup(\{(1,3),(2,4),(3,2)\})$ e $\inf(\{(1,3),(2,4),(3,2)\})$. Justifique.**

   Dados um c.p.o. $(P, \leq)$, $X \subseteq P$ e $m \in P$, diz-se que:

   - m é um supremo de X se m é um majorante de X (isto é, para todo $x \in X$, $x \leq m$) e m é o menor dos majorantes de X;
   - m é um ínfimo de X se m é um minorante de X (isto é, para todo $x \in X$, $m \leq x$) e m é o maior dos minorantes de X;

   Uma vez que $\mathrm{Maj}(\{(1,3),(2,4),(3,2)\}) = \{(3,4),(3,5),(4,4)\}$ e $(3,4)$ é o menor dos majorantes de $\{(1,3),(2,4),(3,2)\}$, então $\sup(\{(1,3),(2,4),(3,2)\}) = (3,4)$.
   Atendendo a que $\mathrm{Min}(\{(1,3),(2,4),(3,2)\}) = \emptyset$, então não existe ínfimo de $\{(1,3),(2,4),(3,2)\}$.

6. **Diga, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras para quaisquer conjuntos não vazios A, B e C.**

   (a) **Se $A \times C \sim B \times C$, então $A \sim B$.**

   A afirmação é falsa.
   Contra-exemplo: Sejam $A = \{1\}$, $B = \mathbb{N}$ e $C = \mathbb{N}$. Então $A \times C \sim \mathbb{N}$, $B \times C \sim \mathbb{N}$ e, portanto, $A \times C \sim B \times C$.
   No entanto, $A \nsim B$.

(b) **Se $A \cup B$ é numerável, então A é numerável ou B é numerável.**

A afirmação é verdadeira.

Admitamos que $A \cup B$ é numerável. Então $A \cup B$ é contável e $A \cup B \sim \mathbb{N}$. Todo o subconjunto de um conjunto contável é um conjunto contável, logo todo o subconjunto de um conjunto contável é um conjunto finito ou é numerável. Assim, como $A, B \subseteq A \cup B$ tem-se que: A é finito ou é numerável; B é finito ou é numerável. Uma vez que $A \cup B$ é infinito, A e B não podem ser ambos finitos (pois a união de dois conjuntos finitos é um conjunto finito). Logo A é numerável ou B é numerável.

Cotação: 1-(1,75+1,0); 2-(2,0); 3-(1,5+1,75+1,5); 4-(1,5+1,0+1,0); 5-(1,0+1,0+1,0+1,5); 6-(1,25+1,25).