Tópicos de Matemática

2º teste (4 de janeiro de 2017) — duração: 2h00

1. Sejam $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ as funções definidas por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{2}, & \text{se } x \geq 0 \text{ e } x \text{ é par} \\ x+1, & \text{se } x \geq 0 \text{ e } x \text{ é ímpar} \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x) = 2x - 2.$$

   (a) Determine $f(\{-4,5,6\})$ e $f^{\leftarrow}(\{4,5\})$.
   (b) Diga, justificando, se: i. f é injetiva; ii. f é sobrejetiva.
   (c) Verifique se $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Justifique a sua resposta.
   (d) Diga, justificando, se existe alguma aplicação $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ tal que $h \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ e $f \circ h = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

2. Sejam A e B conjuntos, $Y_1, Y_2 \subseteq B$ e $f : A \to B$ uma função. Prove que $f^{\leftarrow}(Y_1 \cap Y_2) = f^{\leftarrow}(Y_1) \cap f^{\leftarrow}(Y_2)$.

3. Sejam $A = \{1,2,3,4,5\}$ e S e T as relações binárias em A definidas, respetivamente, por

$$S = \{(x,y) \in A \times A \mid x - y = 2\} \quad \text{e}$$
$$T = \{(1,3),(3,2),(2,3),(4,3),(5,4)\}.$$

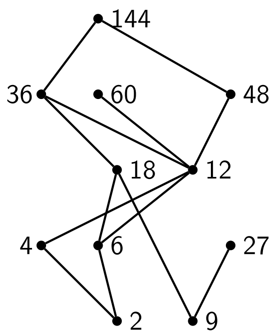
   (a) Determine $\mathrm{Dom}(S) \cap \mathrm{Im}(T)$.
   (b) Diga, justificando, se $\mathrm{id}_A \subseteq T^{-1} \circ T$.
   (c) Determine, caso exista, a menor relação binária em A que contém T e é:
      i. antissimétrica. ii. transitiva.

4. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e R_n a relação de equivalência em $A = \{x \in \mathbb{Z} : -4 \leq x \leq 4\}$ definida por

$$x \, R_n \, y \Leftrightarrow x - y = kn, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}.$$

   (a) Considere $n = 4$.
      i. Mostre que a relação binária R_4 é, efetivamente, transitiva.
      ii. Determine $[1]_{R_4}$ e A/R_4.
   (b) Indique um valor de n tal que $A/R_n = \{A\}$.

5. (a) Sejam $A = \{2,4,6,9,12,18,27,36,48,60,144\}$ e $(A, |)$ o c.p.o. com o seguinte diagrama de Hasse associado



   [Nota: A ordem parcial | é a relação binária definida em A por $a \,|\, b \Leftrightarrow b = ka$, para algum $k \in \mathbb{N}$.]

   Indique, caso existam:
      i. os elementos minimais e os elementos maximais de A.
      ii. Maj({4,6}), $\sup(\{4{,}6\})$, Min({18,48}) e inf({18,48}).
   (b) Seja $(B, \leq)$ um c.p.o. e $S \subseteq B$. Suponha que S tem elemento máximo m. Mostre que m é o supremo de S.

6. Diga, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras para quaisquer conjuntos A, B e C.
   (a) Se A, B, C são conjuntos tais que $C \neq \emptyset$ e $A \cap C \sim B \cap C$, então $A \sim B$.
   (b) Se A é um conjunto tal que $a \notin A$ e $A \cup \{a\} \sim A$, então A é infinito.

Cotação: 1-(1,5+1,5+1,25+1,0); 2-(1,5); 3-(1,25+1,25+1,5); 4-(1,0+1,25+0,75); 5-(1,25+1,25+1,25); 6-(1,25+1,25).