Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Licenciatura em Ciências da Computação
2011/2012

Tópicos de Matemática

primeiro teste - versão **A** :: 18 de janeiro de 2012

IMPORTANTE: A duração do teste é de **2 horas**. O teste é composto por nove exercícios. Os exercícios **1.-5.** devem ser resolvidos no enunciado. Os exercícios **6.-9.** devem ser resolvidos numa folha separada. Nos exercícios em que a cotação não é indicada no enunciado, cada resposta certa conta 0,5 valores e cada resposta errada desconta 0,2 valores.

Nome: | **Número:**

exercício 1. Indique, de entre as correspondências seguintes, as que são funções (F) e as que não o são (N)

F N

☐ ☐ A correspondência $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ definida por $f(n,m)=n-m$.

☐ ☐ A correspondência $g\colon \mathcal{P}(\mathbb{N})\to\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definida por $g(X)=\begin{cases}\emptyset, & \text{se } X\subseteq\{1,2\}\\ \mathbb{N}, & \text{se } \{1,2\}\subsetneq X\end{cases}$.

☐ ☐ A correspondência $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $h(x)=\begin{cases}2, & \text{se } x^2\geq 4\\ 1, & \text{se } x<3\end{cases}$.

☐ ☐ A correspondência $p\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ definida por $p(n,m)=n$.

exercício 2. Considere os conjuntos $X=\{1,2,3,4\}$, $Y=\{a,b,c,d\}$ e $Z=\{x,y,z\}$. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V F

☐ ☐ Existe uma função injetiva de X em Z.

☐ ☐ Existe uma função sobrejetiva de X em Z.

☐ ☐ Existe uma função bijetiva de X em Y.

☐ ☐ Existe uma função sobrejetiva e não injetiva de X em Y.

exercício 3. Sejam $A=\{1,2,3,4,5\}$ e $B=\{3,4,5\}$. Considere as relações binárias R, de A em B, e S, em A, dadas por

$$R=\{(1,3),(1,5),(2,4),(3,5)\},\qquad S=\{(1,1),(3,3),(5,5)\}.$$

Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V F

☐ ☐ R é antissimétrica e transitiva.

☐ ☐ S é simétrica e antissimétrica.

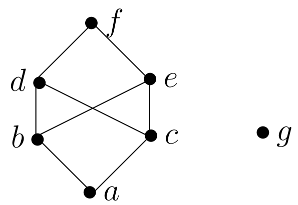
☐ ☐ $S\circ R=R$.

☐ ☐ $\mathrm{id}_B\cup R$ é uma relação de equivalência em A.

exercício 4. Considere o conjunto $C = \{a, b, c, d, e\}$. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
☐	☐	Existe uma relação de equivalência $\sim$ em C tal que $C/\sim = \{\{a, c, e\}, \{b\}, \{d\}\}$.
☐	☐	Existe uma relação de equivalência $\sim$ em C tal que $C/\sim = \mathcal{P}(C)$.
☐	☐	Existe uma relação de equivalência em C tal que $[b]_\sim = \{a, b, c\}$ e $[c]_\sim = \{c, d, e\}$.
☐	☐	Existe uma relação de equivalência em C tal que $[a]_\sim = \emptyset$.

exercício 5. Seja $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Considere o c.p.o. $(X, \leq)$ representado pelo seguinte diagrama de Hasse:



Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
☐	☐	$(X, \leq)$ é um reticulado.
☐	☐	Existe um elemento de X que é simultaneamente minimal e maximal.
☐	☐	O elemento a é o mínimo de X.
☐	☐	$(X, \leq)$ não é isomorfo a uma cadeia.

exercício 6. Considere as funções $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ dadas por

$$f(n) = \begin{cases} 3n - 2, & n = 2 \vee n = 4 \\ 2n, & n \neq 2 \wedge n \neq 4 \end{cases}, \qquad g(n) = |n| + 5.$$

(a) (1 valor) Determine $f(\{1, 2, 3, 4, 5\})$ e $f^{\leftarrow}(\{7, 8, 9\})$.

(b) (1 valor) Determine $g(\mathbb{Z})$ e $g^{\leftarrow}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$.

(c) (0,75 valores) Diga, justificando, se f é injetiva e/ou sobrejetiva.

(d) (0,75 valores) Indique a função composta $f \circ g$.

exercício 7. Considere o conjunto $A = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 15, 30, 35, 42\}$ e a relação de equivalência $\sim$ definida em A por

$$x \sim y \iff x \text{ e } y \text{ têm o mesmo número de divisores primos (distintos).}$$

(a) (0,75 valores) Determine $[2]_\sim$.

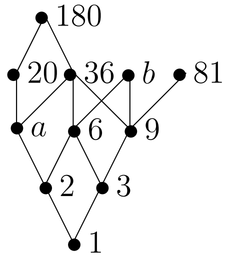
(b) (0,75 valores) Determine o conjunto quociente $A/\sim$.

(c) (0,75 valores) Dê exemplo, ou justifique que não existe, uma partição Π de A tal que $\sim \subsetneq R_\Pi \subsetneq \omega_A$

exercício 8. Sejam a, b dois números naturais e seja $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 20, 36, 81, 180, a, b\}$. Seja $|$ a relação "divide" definida em A por

$$x \,|\, y \iff \exists k \in \mathbb{N} : y = kx \qquad (x, y \in A).$$

O diagrama de Hasse associado a $(A, |)$ é o seguinte:



(a) (0,75 valores) Indique, justificando, os elementos maximais e minimais de A.

(b) (1,5 valores) Sejam X = {6, 20, b} e Y = {2, 6, 9}. Indique, justificando, o conjunto dos majorantes e o conjunto dos minorantes de X e de Y em A e, caso existam, o supremo e o ínfimo de X e de Y.

(d) (0,75 valores) Dê exemplo de dois números $a, b \in \mathbb{N}$ tais que o diagrama de Hasse associado a $(A, |)$ seja o representado anteriormente.

exercício 9. (1.25 valores) Prove que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$3 + 3 \times 5^1 + 3 \times 5^2 + \ldots + 3 \times 5^n = 3 \times \frac{5^{n+1} - 1}{4}.$$