Universidade do Minho LCC

Tópicos de Matemática
Teste Global/ 2º Teste
12/01/2011

(duração: 2 horas)

NOTA: Os alunos podem optar pela realização de um Teste Global (sobre a totalidade dos conteúdos programáticos leccionados nas aulas) ou pela realização de um 2º Teste (a incidir sobre os conteúdos programáticos: Indução, Funções, Relações Binárias, Relações de Equivalência, Relações de Ordem e Cardinalidade).
Os alunos que optem por resolver o **Teste Global** devem resolver **as questões 1, 2, 3, 4, 5, 7 e 9** e a sua classificação final na avaliação periódica será determinada com base na avaliação obtida neste teste.
Os alunos que optem por resolver o 2º **Teste** devem resolver **as questões 4, 5, 6, 7, 8 e 9** e a sua classificação final na avaliação periódica será determinada com base na média ponderada das classificações obtidas no 1º e no 2º testes.
Todas as respostas devem ser convenientemente justificadas.

1. Considere a fórmula proposicional $\varphi : (p_1 \Rightarrow (p_0 \vee p_2)) \wedge (\neg p_1 \vee p_2)$. Diga se são verdadeiras as seguintes afirmações:
   (a) A fórmula φ é uma contradição.
   (b) Uma condição suficiente para p_0 ter valor lógico falso é φ ter valor lógico falso.

2. Sejam

   $$A = \{-2, 2, -4, 4\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in A \wedge 2x \in A\}, \qquad C = \{1, \{2, \{3\}\}\} \qquad D = \{\{1\}, \{2, \{3\}\}\}.$$

   (a) Determine $(A \times B) \setminus (B \times A)$.
   (b) Determine $\mathcal{P}(C) \cap \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
   (c) Indique o menor conjunto X tal que $D \subseteq \mathcal{P}(X)$.

3. Sejam A, B conjuntos. Mostre que se $A \cup B \in \mathcal{P}(A \cap B)$, então $A = B$.

4. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $p(n)$ o predicado "$2 + 6 + 10 + \ldots + (4n - 2) = 2n^2$". Prove que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ é verdadeira.

5. Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

   $$f(n) = \begin{cases} 2n & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ n + 2 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

   (a) Determine
      (i) $f(\{3, 4, 8\})$;
      (ii) $f^{\leftarrow}(\{3, 5, 6\})$.
   (b) Diga se f é injetiva.
   (c) Indique se f é sobrejetiva.

6. Sejam A, B conjuntos, X um subconjunto de A e $f : A \to B$ uma função. Mostre que se f é injetiva, então $f^{\leftarrow}(f(X)) = X$.

7. Sejam A um conjunto e R a relação binária definida em $\mathcal{P}(A)$ por

$$X \, R \, Y \text{ se e só se } X \setminus \{1,2\} = Y \setminus \{1,2\}.$$

   (a) Mostre que R é uma relação de equivalência.

   (b) Considere $A = \{1,2,3\}$. Determine a classe de equivalência $[\{1\}]_R$ e o conjunto quociente $\mathcal{P}(A)/R$.

   (c) Dê um exemplo de ou justifique por que não existe

      (i) um conjunto A não vazio tal que R é a relação universal em $\mathcal{P}(A)$.

      (ii) um conjunto A não vazio tal que R é a relação identidade em $\mathcal{P}(A)$.

8. Dê exemplo de ou justifique por que não existe(m)

   (a) funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$, com A, B, C conjuntos não vazios, tais que g seja sobrejetiva e $g \circ f$ seja não sobrejetiva;

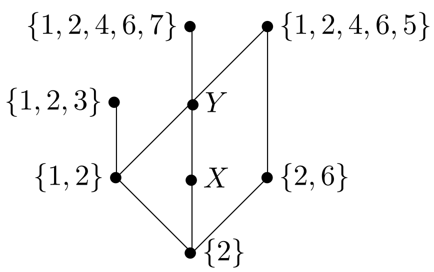
   (b) uma relação binária R definida num conjunto A que não seja simétrica nem antissimétrica;

   (c) uma relação de equivalência R definida em $A = \{1,2,3,4,5\}$ tal que

$$A/R = \{\{1\},\{2,3\},\{1,4\},\{5\}\};$$

   (d) uma partição Π do conjunto $\{1,2,3\}$ tal que a relação de equivalência R_Π associada a Π seja antissimétrica.

9. Seja $A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tal que $(A, \subseteq)$ tem o diagrama de Hasse a seguir representado:



Considere o conjunto $B = \{\{1,2\}, X\}$.

   (a) Determine os elementos maximais e minimais de A.

   (b) Determine os majorantes e os minorantes de B e, caso existam, o supremo e o ínfimo de B.

   (c) Determine os conjuntos X e Y.

Cotação:
1. (2,5 valores) **2.** (3,5 valores) **3.** (2,0 valores) **4.** (2,0 valores)
5. (3,0 valores) **6.** (2,0 valores) **7.** (4,0 valores) **8.** (6,0 valores)
9. (3,0 valores)