Universidade do Minho LCC

Tópicos de Matemática
Teste Global/ 2º Teste
12/01/2011

(duração: 2 horas)

Proposta de resolução do 2º Teste e do Teste Global

1. **Considere a fórmula proposicional $\varphi : (p_1 \Rightarrow (p_0 \vee p_2)) \wedge (\neg p_1 \vee p_2)$. Diga se são verdadeiras as seguintes afirmações:**

   (a) **A fórmula φ é uma contradição.**

   Uma fórmula proposicional diz-se uma contradição se assume sempre o valor lógico falso (F) independentemente do valor lógico das variáveis proposicionais que nela ocorrem. Da tabela de verdade da fórmula proposicional φ

p_0	p_1	p_2	$p_0 \vee p_2$	$\neg p_1$	$\neg p_1 \vee p_2$	$p_1 \to (p_0 \vee p_2)$	φ
F	F	F	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	F
V	V	V	V	F	V	V	V

   podemos verificar que esta fórmula nem sempre é falsa. Por exemplo, quando as variáveis proposicionais p_0, p_1 e p_2 assumem todas o valor lógico falso (F), a fórmula proposicional φ assume o valor lógico verdadeiro (V). Logo a fórmula φ não é uma contradição e, portanto, a afirmação do enunciado é falsa.

   (b) **Uma condição suficiente para p_0 ter valor lógico falso é φ ter valor lógico falso.**

   Esta afirmação é verdadeira se a variável proposicional p_0 assumir valor lógico falso (F) sempre que a fórmula φ assumir valor lógico falso (F). Ora, como podemos verficar pela sétima linha da tabela de verdade, a fórmula φ tem valor lógico falso (F) e, no entanto, a variável p_0 tem valor lógico verdadeiro (V). Logo φ ter valor lógico falso não é uma condição suficiente para p_0 ter valor lógico falso. Assim, a afirmação do enunciado é falsa.

2. **Sejam**

$$A = \{-2, 2, -4, 4\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in A \wedge 2x \in A\}, \qquad C = \{1, \{2, \{3\}\}\} \qquad D = \{\{1\}, \{2, \{3\}\}\}.$$

   (a) **Determine $(A \times B) \setminus (B \times A)$.**

   Tem-se

$$\begin{aligned} B &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in A \wedge 2x \in A\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in A\} \cap \{x \in \mathbb{R} : 2x \in A\} \\ &= \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -2, 2\} \cap \{-1, 1, -2, 2\} \\ &= \{-2, 2\} \end{aligned}$$

   Agora, por definição de produto cartesiano de dois conjuntos,

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(a, b) : a \in A \ \wedge \ b \in B\} \\ &= \{(-2,-2), (-2,2), (2,-2), (2,2), (-4,-2), (-4,2), (4,-2), (4,2)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \times A &= \{(b, a) : b \in B \ \wedge \ a \in A\} \\ &= \{(-2,-2), (2,-2), (-2,2), (2,2), (-2,-4), (2,-4), (-2,4), (2,4)\}. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{array}{rcl}(A \times B) \setminus (B \times A) & = & \{(x,y) : (x,y) \in A \times B \ \wedge \ (x,y) \notin B \times A\} \\ & = & \{(-4,-2),(-4,2),(4,-2),(4,2)\}\end{array}$$

(b) **Determine $\mathcal{P}(C) \cap \mathcal{P}(\mathbb{N})$.**

Tem-se

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{P}(C) \cap \mathcal{P}(\mathbb{N}) & = & \{X : X \subseteq C\} \cap \{Y : Y \subseteq \mathbb{N}\} \\ & = & \{\emptyset, \{1\}, \{\{2,\{3\}\}\}, \{1,\{2,\{3\}\}\}\} \cap \{Y : Y \subseteq \mathbb{N}\} \\ & \stackrel{(*)}{=} & \{\emptyset, \{1\}\}.\end{array}$$

$(*)$ Note-se que $\emptyset$ e $\{1\}$ são subconjuntos de $\mathbb{N}$, mas o mesmo não acontece com os conjuntos $\{\{2,\{3\}\}\}$ e $\{1,\{2,\{3\}\}\}$.

(c) **Indique o menor conjunto X tal que $D \subseteq \mathcal{P}(X)$.**

Uam vez que $D \subseteq \mathcal{P}(X)$ segue que $\{1\} \in \mathcal{P}(X)$ e $\{2,\{3\}\} \in \mathcal{P}(X)$ e, portanto, $\{1\} \subseteq X$ e $\{2,\{3\}\} \subseteq X$. Logo $\{1,2,\{3\}\} \subseteq X$.
Se considerarmos $X = \{1,2,\{3\}\}$ é fácil verificar que X é o menor conjunto tal que $D \subseteq \mathcal{P}(X)$. Com efeito,

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{\{3\}\}, \{1,2\}, \{1,\{3\}\}, \{2,\{3\}\}, \{1,2,\{3\}\}\},$$

pelo que $D \subseteq \mathcal{P}(X)$. Além disso, se considerarmos um conjunto Y tal que $D \subseteq \mathcal{P}(Y)$, segue que $\{1,2,\{3\}\} \subseteq Y$, logo $X \subseteq Y$.

3. **Sejam A, B conjuntos. Mostre que se $A \cup B \in \mathcal{P}(A \cap B)$, então $A = B$.**

Sejam A, B conjuntos tais que $A \cup B \in \mathcal{P}(A \cap B)$. Então $A \cup B \subseteq A \cap B$. Logo, como

$$\begin{array}{ll}A \cap B \subseteq A, & A \cap B \subseteq B \quad \text{e} \\ A \subseteq A \cup B, & B \subseteq A \cup B\end{array}$$

segue que $A \subseteq A \cup B \subseteq A \cap B \subseteq B$ e $B \subseteq A \cup B \subseteq A \cap B \subseteq A$. Assim, temos $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ e, portanto, $A = B$.

4. **Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $p(n)$ o predicado "$2 + 6 + 10 + \ldots + (4n-2) = 2n^2$". Prove que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ é verdadeira.**

A prova é feita recorrendo ao Princípio de Indução Simples para $\mathbb{N}$, o qual estabelece o seguinte:

Principio de Indução Simples para $\mathbb{N}$

Seja $q(n)$ um predicado sobre $\mathbb{N}$.

Se

(i) $q(1)$ é verdadeira;

(ii) Para todo $k \in \mathbb{N}$, $q(k) \Rightarrow q(k+1)$

então, $q(n)$ é verdadeiro, para todo $n \in \mathbb{N}$.

No que diz respeito ao predicado $p(n)$: "$2 + 6 + 10 + \ldots + (4n-2) = 2n^2$", verifica-se-se o seguinte:

(i) (Base de Indução)

Temos

$$4 \times 1 - 2 = 2 = 2 \times 1^2$$

e, portanto, $p(1)$ é verdadeiro.

(ii) (Passo de Indução)

Dado $k \in \mathbb{N}$, admita-se, por Hipótese de Indução, que $p(k)$ é verdadeiro, ou seja, que "$2+6+10+\ldots+(4k-2)=2k^2$" é verdade. Com base nesta hipótese prova-se que $p(k+1)$: "$2+6+10+\ldots+(4k-2)+(4(k+1)-2)=2(k+1)^2$" também é verdadeiro. De facto, assumindo $p(k)$, tem-se

$$\begin{aligned} 2+6+10+\ldots+(4k-2)+(4(k+1)-2) &= 2k^2+(4(k+1)-2) \quad \text{(Hipótese de Indução)} \\ &= 2k^2+4k+2 \\ &= 2(k^2+2k+1) \\ &= 2(k+1)^2 \end{aligned}$$

e, portanto, $p(k+1)$ também é verdadeiro. Logo, para todo $k \in \mathbb{N}$, $p(k) \Rightarrow p(k+1)$.

Assim, de (i), (ii) e do Princípio de Indução Simples para $\mathbb{N}$, concluímos que $p(n)$ é verdadeiro, para todo $n \in \mathbb{N}$.

5. **Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por**

$$f(n) = \begin{cases} 2n & \text{se} \quad n \text{ é ímpar} \\ n+2 & \text{se} \quad n \text{ é par} \end{cases}$$

(a) **Determine**

(i) $f(\{3,4,8\})$;

Tem-se

$$f(\{3,4,8\}) = \{f(x) : x \in \{3,4,8\}\} = \{f(3), f(4), f(8)\} \overset{(*)}{=} \{6,10\}.$$

$(*)$ Note-se que: 3 é ímpar e, portanto, $f(3) = 2 \times 3 = 6$; 4 e 8 são pares, logo $f(4) = 4+2 = 6$ e $f(8) = 8+2 = 10$.

(ii) $f^{\leftarrow}(\{3,5,6\})$.

Por definição de pré-imagem de um conjunto temos

$$\begin{aligned} f^{\leftarrow}(\{3,5,6\}) &= \{n \in \mathbb{N} : f(n) \in \{3,5,6\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} : f(n) = 3\} \cup \{n \in \mathbb{N} : f(n) = 5\} \cup \{n \in \mathbb{N} : f(n) = 6\}. \end{aligned}$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ é par (se n é ímpar, $f(n) = 2n$ é par; se n é par, $f(n) = n+2$ é também par, pois a soma de dois naturais pares é par). Logo

$$\{n \in \mathbb{N} : f(n) = 3\} = \emptyset \quad \text{e} \quad \{n \in \mathbb{N} : f(n) = 5\} = \emptyset.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \{n \in \mathbb{N} : f(n) = 6\} &= \{n \in \mathbb{N} : (n \text{ é ímpar e } 2n = 6) \text{ ou } (n \text{ é par e } n+2 = 6)\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} : (n \text{ é ímpar e } n = 3) \text{ ou } (n \text{ é par e } n = 4)\} \\ &= \{3,4\}, \end{aligned}$$

Portanto

$$f^{\leftarrow}(\{3,5,6\}) = \emptyset \cup \emptyset \cup \{3,4\} = \{3,4\}.$$

(b) **Diga se f é injetiva.**

A aplicação f é injetiva se, para todo $x, y \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Ora, como vimos na alínea (a)-(i), temos $f(3) = 6 = f(4)$ e, no entanto, $3 \neq 4$. Logo f não é injetiva.

(c) **Indique se f é sobrejetiva.**

A aplicação f é sobrejetiva se

$$\forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N}\ f(x) = y.$$

Da alinea (a)-(ii) sabemos que não existe qualquer $x \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) = 3$. Logo f não é sobrejetiva.

6. **Sejam A, B conjuntos, X um subconjunto de A e $f : A \to B$ uma função. Mostre que se f é injetiva, então $f^{\leftarrow}(f(X)) = X$.**

Admitamos que $f : A \to B$ é uma aplicação injetiva.

Por definição de imagem de um conjunto e de pré-imagem de um conjunto, temos

$$f(X) = \{f(a) : a \in X\} \text{ e } f^{\leftarrow}(f(X)) = \{a \in A : f(a) \in f(X)\}.$$

Comecemos por mostrar que $X \subseteq f^{\leftarrow}(f(X))$. Dado $x \in X$, é imediato, por definição de $f(X)$, que $f(x) \in f(X)$. Logo $x \in f^{\leftarrow}(f(X))$, pois $x \in A$ ($x \in X$ e $X \subseteq A$) e $f(x) \in f(X)$. Assim, $X \subseteq f^{\leftarrow}(f(X))$.

Resta, agora, mostrar que $f^{\leftarrow}(f(X)) \subseteq X$. Dado $x \in f^{\leftarrow}(f(X))$, temos que $f(x) \in f(X)$. Logo $f(x) = f(a)$, para algum $a \in X$, e como f é injetiva, segue que $x = a$. Logo $x \in X$. Assim, $f^{\leftarrow}(f(X)) \subseteq X$.

Uma vez que $X \subseteq f^{\leftarrow}(f(X))$ e $f^{\leftarrow}(f(X)) \subseteq X$, temos $f^{\leftarrow}(f(X)) = X$.

7. **Sejam A um conjunto e R a relação binária definida em $\mathcal{P}(A)$ por**

$$X\,R\,Y \textbf{ se e só se } X \setminus \{1,2\} = Y \setminus \{1,2\}.$$

(a) **Mostre que R é uma relação de equivalência.**

A relação R é uma relação de equivalência se for reflexiva, simétrica e transitiva.

[Reflexividade]

Para todo $X \in \mathcal{P}(A)$, é óbvio que $X \setminus \{1,2\} = X \setminus \{1,2\}$. Logo, para todo $X \in \mathcal{P}(A)$, temos $X\,R\,X$ e, portanto, a relação R é reflexiva.

[Simetria]

Para quaisquer $X, Y \in \mathcal{P}(A)$,

$$\begin{aligned} X\,R\,Y &\Rightarrow X \setminus \{1,2\} = Y \setminus \{1,2\} \\ &\Rightarrow Y \setminus \{1,2\} = X \setminus \{1,2\} \\ &\Rightarrow Y\,R\,X \end{aligned}$$

Logo R é simétrica.

[Transitividade]

Para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$,

$$\begin{aligned} X\,R\,Y \ \wedge\ Y\,R\,Z &\Rightarrow X \setminus \{1,2\} = Y \setminus \{1,2\} \ \wedge\ Y \setminus \{1,2\} = Z \setminus \{1,2\} \\ &\Rightarrow X \setminus \{1,2\} = Z \setminus \{1,2\} \\ &\Rightarrow X\,R\,Z \end{aligned}$$

Logo R é transitiva.

Uma vez que R é reflexiva, simétrica e transitiva, então R é uma relação de equivalência.

(b) **Considere $A = \{1,2,3\}$. Determine a classe de equivalência $[\{1\}]_R$ e o conjunto quociente $\mathcal{P}(A)/R$.**

Temos

$$\begin{aligned}
[\{1\}]_R &= \{X \in \mathcal{P}(A) : \{1\}\, R\, X\} \\
&= \{X \in \mathcal{P}(A) : \{1\} \setminus \{1,2\} = X \setminus \{1,2\}\} \\
&= \{X \in \mathcal{P}(A) : \emptyset = X \setminus \{1,2\}\} \\
&= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}.
\end{aligned}$$

Uma vez que $\mathcal{P}(A)/R$ é uma partição de $\mathcal{P}(A)$, então classes de equivalências distintas são disjuntas (ou seja, a sua interseção é o conjunto vazio). Logo, atendendo a que $\emptyset \in [\emptyset]_R$, $\{2\} \in [\{2\}]_R$, $\{1,2\} \in [\{1,2\}]_R$, segue que

$$[\{1\}]_R = [\emptyset]_R = [\{2\}]_R = [\{1,2\}]_R.$$

Por definição,

$$\mathcal{P}(A)/R = \{[X]_R : X \in \mathcal{P}(A)\}.$$

Logo, como

$$[\{1\}]_R = [\emptyset]_R = [\{2\}]_R = [\{1,2\}]_R \qquad \text{e}$$

$$[\{3\}]_R = \{\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\} = [\{3\}]_R = [\{1,3\}]_R = [\{2,3\}]_R = [\{1,2,3\}]_R.$$

temos $\mathcal{P}(A)/R = \{[\{1\}]_R, [\{3\}]_R\}$.

(c) **Dê um exemplo de ou justifique por que não existe**

(i) **um conjunto A não vazio tal que R é a relação universal em $\mathcal{P}(A)$.**

Seja $A = \{1,2\}$. Então $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\, \{1,2\}\}$ e, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{P}(A)$,

$$X \setminus \{1,2\} = \emptyset = Y \setminus \{1,2\}.$$

Logo, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{P}(A)$, temos $X\, R\, Y$, pelo que R é a relação universal em $\mathcal{P}(A)$.

(ii) **um conjunto A não vazio tal que R é a relação identidade em $\mathcal{P}(A)$.**

Seja $A = \{3\}$. Então $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{3\}\}$ e $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) = \{(\emptyset, \emptyset), (\{3\}, \{3\}), (\emptyset, \{3\}), (\{3\}, \emptyset)\}$. Dado que R é uma relação binária em $\mathcal{P}(A)$ tem-se $R \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$. Por outro lado, como R é reflexiva segue que $\{(\emptyset, \emptyset), (\{3\}, \{3\})\} \subseteq R$. No entanto, $(\emptyset, \{3\}), (\{3\}, \emptyset) \notin R$, pois $\emptyset \setminus \{1,2\} = \emptyset \neq \{3\} = \{3\} \setminus \{1,2\}$. Logo $R = \{(\emptyset, \emptyset), (\{3\}, \{3\})\}$ e, portanto, R é a relação identidade em $\mathcal{P}(A)$.

8. **Dê exemplo de ou justifique por que não existe(m)**

(a) **funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$, com A, B, C conjuntos não vazios, tais que g seja sobrejetiva e $g \circ f$ seja não sobrejetiva;**

Consideremos os conjuntos $A = \{1,2\}$, $B = \{3,4\}$, $C = \{5,6\}$ e as funções

$$\begin{array}{l} f : A \to B \\ \left\{ \begin{array}{lcl} 1 & \mapsto & 3 \\ 2 & \mapsto & 3 \end{array} \right. \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{l} g : B \to C \\ \left\{ \begin{array}{lcl} 3 & \mapsto & 5 \\ 4 & \mapsto & 6. \end{array} \right. \end{array}$$

Então g é sobrejetiva, pois $g(B) = C$, mas a aplicação $g \circ f : A \to C$ não é sobrejetiva, pois $(g \circ f)(A) = g(f(A)) = g(\{3\}) = \{5\} \neq C$.

(b) **uma relação binária R definida num conjunto A que não seja simétrica nem antissimétrica;**

Sejam $A = \{1,2,3\}$ e $R = \{(1,2), (2,3), (3,2)\}$.

A relação R não é simétrica, pois $(1,2) \in R$, mas $(2,1) \notin R$, e também não é antissimétrica, uma vez que $(2,3) \in R$, $(3,2) \in R$ e $2 \neq 3$.

(c) **uma relação de equivalência R definida em $A = \{1,2,3,4,5\}$ tal que**

$$A/R = \{\{1\},\{2,3\},\{1,4\},\{5\}\}.$$

Se S é uma relação de equivalência definida num conjunto X, então X/S é uma partição de X. Por sua vez, se X/S é uma partição de X, tem-se, por definição de partição de um conjunto, que para quaisquer $C, D \in X/S$,

$$C \neq D \Rightarrow C \cap D = \emptyset.$$

Logo A/R não é uma partição de A, pois $\{1\} \neq \{1,4\}$ e $\{1\} \cap \{1,4\} \neq \emptyset$. Portanto, não existe qualquer relação de equivalência R definida em A tal que $A/R = \{\{1\},\{2,3\},\{1,4\},\{5\}\}$.

(d) **uma partição Π do conjunto $\{1,2,3\}$ tal que a relação de equivalência R_Π associada a Π seja antissimétrica.**

Seja $\Pi = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$.

Facilmente se verifica que Π é uma partição de $\{1,2,3\}$, pois

i. para todo $X \in \Pi, X \neq \emptyset$;
ii. para quaisquer $X, Y \in \Pi$, $X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset$;
iii. para todo $x \in A$, existe $X \in \Pi$ tal que $x \in X$.

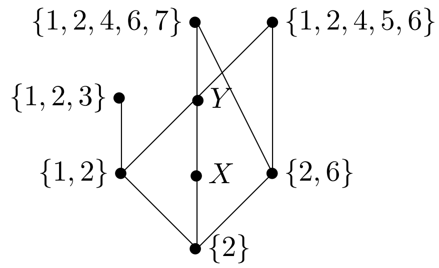
Por definição de relação de equivalência associada à partição Π, temos

$$R_\Pi = \{(x,y) \in A \times A : \exists X \in \Pi, \{x,y\} \subseteq X\} = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}.$$

Como é simples verificar, esta relação é anitssimétrica, pois não existem $x, y \in A$ tais que

$$x \neq y \wedge (x,y) \in R_\Pi \wedge (y,x) \in R_\Pi.$$

9. **Seja $A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tal que $(A, \subseteq)$ tem o diagrama de Hasse a seguir representado:**



Considere o conjunto $B = \{\{1,2\}, X\}$.

(a) **Determine os elementos maximais e minimais de A.**

Um elemento $M \in A$ diz-se um maximal de A se $\neg(\exists C \in A : M \subsetneqq C)$. Assim, são elementos maximais de A: $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4,6,7\}$ e $\{1,2,4,5,6\}$.

Um elemento $M \in A$ diz-se um minimal de A se $\neg(\exists C \in A : C \subsetneqq M)$. Então $\{2\}$ é o único elemento minimal de A.

(b) **Determine os majorantes e os minorantes de B e, caso existam, o supremo e o ínfimo de B.**

Diz-se que $M \in A$ é um majorante de B se, para todo $C \in B$, $C \subseteq M$. Logo são majorantes de B os conjuntos: Y, $\{1,2,4,6,7\}$ e $\{1,2,4,5,6\}$.

Diz-se que $M \in A$ é um minorante de B se, para todo $C \in B$, $M \subseteq C$. Então $\{2\}$ é o único minorante do conjunto B.

Um elemento $M \in A$ diz-se supremo de B se M é um majorante de B e é o menor dos majorantes de B. Logo Y é o supremo B.

Um elemento $M \in A$ diz-se ínfimo de B se M é um minorante de B e é o maior dos minorantes de B. Assim, $\{2\}$ é o infímo de B.

(c) **Determine os conjuntos X e Y.**

Uma vez que $Y \subseteq \{1,2,4,6,7\}$ e $Y \subseteq \{1,2,4,5,6\}$ segue que $Y \subseteq \{1,2,4,6\}$. Dado que $\{2,6\} \not\subseteq Y$, então $2 \notin Y$ ou $6 \notin Y$. Mas $2 \in Y$, pois $\{1,2\} \subseteq Y$ e, portanto, $6 \notin Y$. Assim, $\{1,2\} \subseteq Y \subseteq \{1,2,4\}$. Por último, atendendo a que $\{1,2\} \subsetneqq Y$, temos $Y = \{1,2,4\}$.

Como $X \subsetneqq Y$, temos que $X \in \{\emptyset, \{1,2\}, \{1,4\}, \{2,4\}\}$. Mas $X \,||\, \{1,2\}$ e, portanto, $X \neq \{1,2\}$. Por outro lado, como $\{2\} \subseteq X$, temos $X \neq \{1,4\}$ e $X \neq \emptyset$. Logo $X = \{2,4\}$.

Cotação:

1. (2,5 valores) **2.** (3,5 valores) **3.** (2,0 valores) **4.** (2,0 valores)
5. (3,0 valores) **6.** (2,0 valores) **7.** (4,0 valores) **8.** (6,0 valores)
9. (3,0 valores)