Universidade do Minho
Departamento de Matemática

26 de novembro de 2021

Tópicos de Matemática

Licenciatura em Ciências da Computação

1º teste - versão A

duração: 1h50min

Nome:	**Número:**

Grupo I

Relativamente às questões deste grupo, indique para cada alínea se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), marcando x no quadrado respetivo.

		V	F
1.	As fórmulas $q \to (q \to q)$ e $(q \to q) \to q$ não são logicamente equivalentes.	X	
2.	A variável p ter valor lógico verdadeiro é uma condição necessária para a fórmula $\neg p \to (p \to \neg p)$ ter valor lógico verdadeiro.		X
3.	Para quaisquer fórmulas φ e ψ, se $\varphi \vee \psi$ é uma tautologia, então φ é uma tautologia ou ψ é uma tautologia.		X
4.	Para quaisquer conjuntos A, B e C, se $A \subseteq B \cup C$, então $A \subseteq B$ ou $A \subseteq C$.		X
5.	Se $A = \{1, \{1, \{1\}\}, \mathbb{Z}\}$, então $A \nsubseteq \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \nsubseteq A$.	X	
6.	Se $A = \{1, 2, \{1, 5\}, \{4\}\}$ e $B = \{(1, 5), 2\}$, então $B \setminus A = \emptyset$.		X

Grupo II

Para cada uma das questões deste grupo, indique a sua resposta sem apresentar qualquer justificação.

1. Considere a proposição

$$p : \forall_{x \in \mathbb{Z}}\ (x < 0 \to \exists_{y \in \mathbb{Z}}\ (y > 0 \wedge x + y = 0))$$

Indique em linguagem simbólica, sem recorrer ao conetivo *negação*, uma proposição equivalente a $\neg p$.

Resposta: $\exists_{x \in \mathbb{Z}}\ (x < 0 \wedge \forall_{y \in \mathbb{Z}}\ (y \leq 0 \vee x + y \neq 0))$

2. Considere os conjuntos

$$A = \{5, \{-5\}, \emptyset\}, B = \{-1, 1, 3\}, C = \{5x \,|\, x \in B \text{ e } x^2 \in B\}.$$

Indique C, $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(C)$ e $B \times (A \setminus \mathbb{Z})$.

Resposta: $C = \{5, -5\}$,

$\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(C) = \{\{\emptyset\}, \{\{-5\}\}, \{5, \emptyset\}, \{\{-5\}, \emptyset\}, \{5, \{-5\}\}, A\}$,

$B \times (A \setminus \mathbb{Z}) = \{(-1, \{-5\}), (1, \{-5\}), (3, \{-5\}), (\emptyset, \{-5\}), (\emptyset, \{-5\}), (\emptyset, \{-5\})\}$.

Grupo III

Resolva cada uma das questões deste grupo na folha de exame. Justifique as suas respostas.

1. Considere as fórmulas proposicionais $\varphi = p \to (\neg p \vee q)$ e $\psi = (\neg q) \to (p \to q)$.

   (a) Justifique que as fórmulas φ e ψ são logicamente equivalentes.

   As fórmulas φ e ψ são logicamente equivalentes se a fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

   Da tabela de verdade seguinte

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee q$	$p \to q$	φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1

   conclui-se que a fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia, pois o seu valor lógico é sempre verdadeiro independentemente do valor lógico das variáveis proposicionais p e q. Por conseguinte, as fórmulas φ e ψ são logicamente equivalentes.

   Resolução alternativa: Considerando as propriedades de equivalência lógica, tem-se

$$\begin{array}{rcll} \neg q \to (p \to q) & \Leftrightarrow & \neg(\neg q) \vee (\neg p \vee q) & ((\varphi \to \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)) \\ & \Leftrightarrow & q \vee (\neg p \vee q) & \text{(dupla negação)} \\ & \Leftrightarrow & \neg p \vee (q \vee q) & \text{(associatividade e comutatividade da disjunção)} \\ & \Leftrightarrow & \neg p \vee q & \text{(idempotência da disjunção)} \end{array}$$

   e

$$\begin{array}{rcll} p \to (\neg p \vee q) & \Leftrightarrow & \neg p \vee (\neg p \vee q) & ((\varphi \to \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)) \\ & \Leftrightarrow & (\neg p \vee \neg p) \vee q & \text{(associatividade da disjunção)} \\ & \Leftrightarrow & \neg p \vee q & \text{(idempotência da disjunção)} \end{array}$$

   Logo, as fórmulas φ e ψ são logicamente equivalentes.

   (b) Diga, justificando, se o argumento representado por

$$\begin{array}{c} \theta \to \neg\psi \\ \underline{\sigma \vee \varphi} \\ \therefore \theta \to \sigma \end{array}$$

   é um argumento válido para quaisquer fórmulas proposicionais σ e θ.

   O argumento é válido, pois sempre que as premissas $\theta \to \neg\psi$ e $\sigma \vee \varphi$ são verdadeiras, a conclusão $\theta \to \sigma$ também é verdadeira. De facto, assumindo que as premissas são verdadeiras, a fórmula $\sigma \vee \varphi$ é verdadeira. Logo, temos dois casos a considerar: σ é verdadeira ou θ é verdadeira.

   - Caso σ seja verdadeira, a fórmula $\theta \to \sigma$ é verdadeira.
   - Caso φ seja verdadeira, a fórmula ψ também é verdadeira, uma vez que ψ e φ são logicamente equivalentes. Assim, $\neg\psi$ é falsa e, como $\theta \to \neg\psi$ é verdadeira, a fórmula θ é falsa. Logo, a fórmula $\theta \to \sigma$ é verdadeira.

   Em qualquer dos casos, a conclusão do argumento é verdadeira e, portanto, o argumento é válido.

2. Considere a proposição

$$p : (\forall_{x\in A}\exists_{y\in A}\ x + y = 2) \to (\exists_{y\in A}\forall_{x\in A}\ x + y = 2)$$

   onde A é um subconjunto de $\mathbb{Z}$.

   (a) Justifique que p é falsa para $A = \mathbb{Z}$.

   Representemos por p_1 e p_2, respetivamente, o antecedente e o consequente da implicação p, ou seja,

$$p_1 = \forall_{x\in A}\exists_{y\in A}\ x + y = 2,$$

$$p_2 =: \exists_{y\in A}\forall_{x\in A}\ x + y = 2.$$

A proposição p_1 é verdadeira, uma vez que, para qualquer $x \in \mathbb{Z}$, existe $y = 2 - x$ tal que $y \in \mathbb{Z}$ e $x + y = 2$. A proposição p_2 é falsa, pois, para todo $y \in \mathbb{Z}$, existe $x = 3 - y$ tal que $x \in \mathbb{Z}$ e $x + y \neq 2$. Então, consideradando que o antecedente da implicação é verdadeiro e o consequente é falso, a proposição p é falsa.

(b) Diga, justificando, se p é verdadeira para algum conjunto A que seja um subconjunto próprio de $\mathbb{Z}$.

A proposição p é verdadeira para $A = \{1\}$, pois o consequente da implicação p é sempre verdadeiro. A proposição p_2 é verdadeira para $A = \{1\}$, uma vez que existe $y = 1 \in A$ tal que, para todo $x \in A$, $x + y = 2$ (o único elemento de A é o elemento $x = 1$ e $x + y = 2$).

Resolução alternativa: A proposição p é verdadeira para $A = \{2\}$, pois o antecedente da implicação é falso. A proposição p_1 é falsa para $A = \{2\}$, pois existe $x = 2 \in A$ tal que, para todo $y \in A$, $x + y \neq 2$ (o único elemento de A é o elemento $y = 2$ e $x + y \neq 2$).

3. Mostre que, para quaisquer inteiros m e n, se mn e $m + n$ são pares, então m e n são ambos pares.

No sentido de se fazer a prova por redução ao absurdo, admitamos que mn e $m + n$ são pares e que m ou n são ímpares.
Se m e n são ambos ímpares, tem-se $m = 2k + 1$ e $n = 2k' + 1$, para alguns $k, k' \in \mathbb{Z}$. Logo, $mn = 2(2kk' + k + k') + 1$, com $2kk' + k + k' \in \mathbb{Z}$. Portanto, mn é ímpar (contradição).
Se m é par e n é ímpar, tem-se $m = 2k$ e $n = 2k' + 1$, para alguns $k, k' \in \mathbb{Z}$. Logo, $m + n = 2(k + k') + 1$, com $k + k' \in \mathbb{Z}$. Portanto, $m + n$ é ímpar (contradição). O caso em que m é ímpar e n é par é análogo ao anterior. Em qualquer dos casos obtem-se uma contradição. Desta forma, ficou provado que se mn e $m + n$ são pares, então m e n são ambos pares.

4. Sejam A, B e C conjuntos. Mostre que $(A \cup B) \setminus (B \cap C) = (A \setminus (B \cap C)) \cup (B \setminus C)$.

Para todo x, tem-se

$$\begin{array}{rcll}
x \in (A \cup B) \setminus (B \cap C) & \Leftrightarrow & (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin (B \cap C) & \text{(definição de união e complementação)} \\
& \Leftrightarrow & (x \in A \wedge x \notin (B \cap C)) \vee (x \in B \wedge x \notin (B \cap C)) & \text{(distributividade)} \\
& \Leftrightarrow & (x \in A \wedge x \notin (B \cap C)) \vee (x \in B \wedge (x \notin B \vee x \notin C)) & \text{(definição de interseção e leis de De Morgan)} \\
& \Leftrightarrow & (x \in A \wedge x \notin (B \cap C)) \vee (x \in B \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin C)) & \text{(distributividade)} \\
& \Leftrightarrow & (x \in A \wedge x \notin (B \cap C)) \vee (x \in B \wedge x \notin C)) & \text{(elemento neutro da disjunção)} \\
& \Leftrightarrow & x \in A \setminus (B \cap C) \vee x \in B \setminus C & \text{(complementação)} \\
& \Leftrightarrow & x \in (A \setminus (B \cap C)) \cup (B \setminus C) & \text{(definição de união)}
\end{array}$$

Logo, $(A \cup B) \setminus (B \cap C) = (A \setminus (B \cap C)) \cup (B \setminus C)$.

5. Prove, por indução nos naturais, que, para todo o natural n,

$$1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \ldots + n \times 2^n = (n - 1) \times 2^{n+1} + 2.$$

Representemos por $p(n)$ o predicado

$$1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \ldots + n \times 2^n = (n - 1) \times 2^{n+1} + 2.$$

Pretendemos mostrar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ é verdadeiro. A prova segue recorrendo ao Princípio de Indução (simples) para $\mathbb{N}$.

(i) Base de indução $(n = 1)$: Para $n = 1$, tem-se

$$1 \times 2 = 2 = (1 - 1) \times 2^{1+1} + 2.$$

Logo $p(1)$ é verdadeiro.

(ii) Passo de indução: Seja $k \in \mathbb{N}$. Admitamos, por hipótese de indução, que $p(k)$ é verdadeiro, isto é,

$$1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \ldots + k \times 2^k = (k - 1) \times 2^{k+1} + 2.$$

Com base na hipótese de indução, prova-se que $p(k + 1)$ é verdadeiro, ou seja,

$$1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \ldots + k \times 2^k + (k + 1) \times 2^{k+1} = k \times 2^{k+2} + 2.$$

De facto,

$$\begin{array}{rll} & 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \ldots + k \times 2^k + (k+1) \times 2^{k+1} & \\ = & ((k-1) \times 2^{k+1} + 2) + (k+1) \times 2^{k+1} & \text{(por hipótese de indução)} \\ = & (k - 1 + k + 1) \times 2^{k+1} + 2 & \\ = & 2k \times 2^{k+1} + 2 & \\ = & k \times 2^{k+2} + 2. & \end{array}$$

Logo, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$p(k) \Rightarrow p(k+1).$$

De (i) e (ii) concluímos, pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$, que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ é verdadeiro.

Cotações:

Cotações:	Grupo I:	6 × 0,75;
	Grupo II:	1. (1,25); 2. (2,25).
	Grupo III:	1. (1,5+1,5); 2. (1,25+1,25); 3. (2,0); 4. (2,0); 5. (2,5).