Universidade do Minho
Departamento de Matemática

13 de novembro de 2019

Tópicos de Matemática

Licenciatura em Ciências da Computação

1º teste

duração: 1h50min

Versão A

1. Considere as fórmulas proposicionais $\varphi : p \vee (q \to p)$ e $\psi : (q \to p) \vee \neg q$.
   (a) Diga, justificando, se a fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.
   (b) O argumento representado por

$$\begin{array}{c} \varphi \\ \gamma \\ \hline \therefore \psi \end{array}$$

   é um argumento válido qualquer que seja a fórmula proposicional γ? Justifique a sua resposta.

2. Considere as proposições

$$p : (\forall_{x \in A}\ (x \leq 20 \vee x \geq 25)) \to ((\forall_{x \in A}\ x \leq 20) \vee (\forall_{x \in A}\ x \geq 25)),$$

$$q : ((\forall_{x \in A}\ x \leq 20) \vee (\forall_{x \in A}\ x \geq 25)) \to (\forall_{x \in A}\ (x \leq 20 \vee x \geq 25))$$

   e que A é um subconjunto de $\mathbb{Z}$.
   (a) Dê exemplo de, ou justifique que não existe exemplo de, um conjunto A onde:
      i. a proposição p seja falsa;
      ii. a proposição q seja falsa.
   (b) Indique em linguagem simbólica, sem recorrer ao conetivo *negação*, uma proposição equivalente a $\neg p$.

3. Mostre que, para quaisquer naturais m e n, se $n^2 + 3m$ é ímpar, então m é ímpar ou n é ímpar.

4. Considere os conjuntos

$$\begin{aligned} &A = \{1, 4, \{9\}\}, \quad && B = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,|\, x^2 \in A \wedge y = x + 3\}, \\ &C = \{\emptyset, \{4\}\}, && D = (\mathbb{Z} \setminus \{4\}) \times (\mathbb{Z} \setminus \{1\}) \end{aligned}$$

   e a família de conjuntos $\{E_a\}_{a \in \mathbb{R}^+}$ tal que, para cada $a \in \mathbb{R}^+$, $E_a = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 < x < 2 + \frac{1}{a}\}$.
   (a) Determine $B \cap D$.
   (b) Determine $\mathcal{P}(C) \setminus \mathcal{P}(A)$. Dê exemplo de um conjunto F tal que $C \in \mathcal{P}(F) \setminus \{F\}$.

5. (a) Diga, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras para quaisquer conjuntos A, B e C.
      i. Se $A \cap B \subseteq C$, então $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = \emptyset$.
      ii. $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$.
   (b) Sejam A, B e C conjuntos. Mostre que se $A \subseteq B$, então $(A \times C) \cup ((B \setminus A) \times C) = B \times C$.

6. Prove, por indução nos naturais, que, para todo o natural n,

$$3 \times 7^0 + 3 \times 7^1 + 3 \times 7^2 + \ldots + 3 \times 7^n = \frac{7^{n+1} - 1}{2}.$$

Cotações: 1. (1,5+1,5); 2. (1,25+1,25+1,25); 3. (2,0); 4. (1,5+1,5+1,0); 5. (1,5+1,5+1,75); 6. (2,5).