Universidade do Minho
Departamento de Matemática

13 de novembro de 2019

Tópicos de Matemática

Licenciatura em Ciências da Computação

1º teste

duração: 1h50min

Versão A

1. **Considere as fórmulas proposicionais** $\varphi : p \vee (q \to p)$ **e** $\psi : (q \to p) \vee \neg q$.

   (a) **Diga, justificando, se a fórmula** $\varphi \leftrightarrow \psi$ **é uma tautologia.**

   Da tabela de verdade seguinte, conclui-se que a fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$ é sempre verdadeira, independentemente do valor lógico das variáveis proposicionais que nela ocorrem. Logo, a fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

p	q	$\neg q$	$q \to p$	φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

   (b) **O argumento representado por**

$$\begin{array}{c} \varphi \\ \gamma \\ \hline \therefore \psi \end{array}$$

   é um argumento válido qualquer que seja a fórmula proposicional γ? Justifique a sua resposta.

   O argumento indicado é válido se a conclusão ψ é verdadeira sempre que as premissas φ e γ são verdadeiras. Uma vez que as fórmulas φ e ψ são logicamente equivalentes, sempre que φ e γ têm valor lógico verdadeiro, a fórmula ψ tem também valor lógico verdadeiro. Logo o argumento é válido.

2. **Considere as proposições**

$$p : (\forall_{x \in A}\ (x \leq 20 \vee x \geq 25)) \to ((\forall_{x \in A}\ x \leq 20) \vee (\forall_{x \in A}\ x \geq 25)),$$

$$q : ((\forall_{x \in A}\ x \leq 20) \vee (\forall_{x \in A}\ x \geq 25)) \to (\forall_{x \in A}\ (x \leq 20 \vee x \geq 25))$$

   e que A é um subconjunto de $\mathbb{Z}$.

   (a) **Dê exemplo de, ou justifique que não existe exemplo de, um conjunto A onde:**

   i. **a proposição p seja falsa;**

   Seja $A = \{20, 25\}$. Para todo $a \in A$, a proposição "$a \leq 20 \vee a \geq 25$" é verdadeira, pelo que a proposição "$\forall_{x \in A}\ x \leq 20 \vee x \geq 25$" é verdadeira. Por outro lado, a proposição "$(\forall_{x \in A}\ x \leq 20) \vee (\forall_{x \in A}\ x \geq 25)$" é falsa, pois ambas as proposições "$\forall_{x \in A}\ x \leq 20$" e "$\forall_{x \in A}\ x \geq 25$" são falsas (a proposição "$\forall_{x \in A}\ x \leq 20$" é falsa, pois existe $a = 25 \in A$ tal que $a \leq 20$ é falso; a proposição "$\forall_{x \in A}\ x \geq 25$" é falsa, pois existe $a = 20 \in A$ tal que $a \geq 25$ é falso). Assim, como o antecedente da implicação p é verdadeiro e o consequente é falso, a proposição p é falsa.

   ii. **a proposição q seja falsa.**

   Não existe qualquer conjunto A onde a proposição p seja falsa, pois sempre que o antecedente da implicação q é verdadeiro, o consequente também é verdadeiro. Se a proposição "$(\forall_{x \in A}\ x \leq 20) \vee (\forall_{x \in A}\ x \geq 25)$" é verdadeira, então uma das proposições "$\forall_{x \in A}\ x \leq 20$" ou "$\forall_{x \in A}\ x \geq 25$" é verdadeira. Caso a proposição "$\forall_{x \in A}\ x \leq 20$" seja verdadeira, então, para todo $a \in A$, "$a \leq 20$" é uma proposição verdadeira, pelo que a proposição "$a \leq 20 \vee a \geq 25$" é verdadeira, para todo $a \in A$; assim, a proposição "$\forall_{x \in A}\ (x \leq 20 \vee x \geq 25)$" é verdadeira. Caso a proposição "$\forall_{x \in A}\ x \geq 25$" seja verdadeira, conclui-se de modo análogo que a proposição "$\forall_{x \in A}\ x \leq 20 \vee x \geq 25$" é verdadeira.

(b) **Indique em linguagem simbólica, sem recorrer ao conetivo negação, uma proposição equivalente a $\neg p$.**

Tem-se

$$\begin{array}{rl}
\neg((\forall_{x\in A}\ (x\leq 20\vee x\geq 25))\to((\forall_{x\in A}\ x\leq 20)\vee(\forall_{x\in A}\ x\geq 25))) & \Leftrightarrow\\
(\forall_{x\in A}\ (x\leq 20\vee x\geq 25))\wedge\neg((\forall_{x\in A}\ x\leq 20)\vee(\forall_{x\in A}\ x\geq 25)) & \Leftrightarrow\\
(\forall_{x\in A}\ (x\leq 20\vee x\geq 25))\wedge\neg(\forall_{x\in A}\ x\leq 20)\wedge\neg(\forall_{x\in A}\ x\geq 25) & \Leftrightarrow\\
\forall_{x\in A}\ (x\leq 20\vee x\geq 25)\wedge(\exists_{x\in A}\ x>20)\wedge(\exists_{x\in A}\ x<25) &
\end{array}$$

Assim,

$$(\forall_{x\in A}\ (x\leq 20\vee x\geq 25))\wedge(\exists_{x\in A}\ x>20)\wedge(\exists_{x\in A}\ x<25)$$

é uma proposição logicamente equivalente a $\neg p$ e na qual não ocorre o conetivo *negação*.

3. **Mostre que, para quaisquer naturais m e n, se n^2+3m é ímpar, então m é ímpar ou n é ímpar.**

No sentido de se fazer a prova por redução ao absurdo, admitamos que n^2+3m é ímpar e que m e n são pares. Uma vez que m e n são pares, existem $k_1,k_2\in\mathbb{N}$ tais que $m=2k_1$ e $n=2k_2$. Então $n^2+3m=(2k_2)^2+3(2k_1)=2(2{k_2}^2+3k_1)$ com $2{k_2}^2+3k_1\in\mathbb{N}$ e, portanto, n^2+3m é par (contradição). Logo, para quaisquer naturais m e n, se n^2+3m é ímpar, então m é ímpar ou n é ímpar.

4. **Considere os conjuntos**

$$\begin{array}{ll}
A=\{1,4,\{9\}\}, & B=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\,|\,x^2\in A\wedge y=x+3\},\\
C=\{\emptyset,\{4\}\}, & D=(\mathbb{Z}\setminus\{4\})\times(\mathbb{Z}\setminus\{1\})
\end{array}$$

e a família de conjuntos $\{E_a\}_{a\in\mathbb{R}^+}$ tal que, para cada $a\in\mathbb{R}^+$, $E_a=\{x\in\mathbb{R}\,|\,1<x<2+\frac{1}{a}\}$.

(a) **Determine $B\cap D$.**

Para qualquer $x\in\mathbb{Z}$, tem-se

$$x^2\in A\Leftrightarrow x^2=1\vee x^2=4\Leftrightarrow x\in\{-1,1,2,2\}.$$

Logo $B=\{(-1,2),(1,4),(-2,1),(2,5)\}$. Então, atendendo a que

$$(\mathbb{Z}\setminus\{4\})\times(\mathbb{Z}\setminus\{1\})=\{(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\,|\,a\neq 4\wedge b\neq 1\},$$

tem-se $B\cap D=\{(-1,2),(1,4),(2,5)\}$.

(b) **Determine $\mathcal{P}(C)\setminus\mathcal{P}(A)$. Dê exemplo de um conjunto F tal que $C\in\mathcal{P}(F)\setminus\{F\}$.**

Tem-se

$$\mathcal{P}(C)=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{4\}\},\{\emptyset,\{4\}\}\}$$

e

$$\mathcal{P}(A)=\{\emptyset,\{1\},\{4\},\{\{9\}\},\{1,4\},\{1,\{9\}\},\{4,\{9\}\},\{1,4,\{9\}\}\},$$

logo

$$\mathcal{P}(C)\setminus\mathcal{P}(A)=\{\{\emptyset\},\{\{4\}\},\{\emptyset,\{4\}\}\}.$$

Seja $F=\{\emptyset,\{4\},2\}$. Então

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{P}(F)\setminus\{F\} & = & \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{4\}\},\{2\},\{\emptyset,\{4\}\},\{\emptyset,2\},\{2,\{4\}\},\{\emptyset,\{4\},2\}\}\setminus\{F\}\\
& = & \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{4\}\},\{2\},\{\emptyset,\{4\}\},\{\emptyset,2\},\{2,\{4\}\}\}
\end{array}$$

e $C\in\mathcal{P}(F)\setminus\{F\}$.

(c) **Indique, sem justificar, $\displaystyle\bigcup_{a\in\mathbb{R}^+}E_a$ e $\displaystyle\bigcap_{a\in\mathbb{R}^+}E_a$.**

Tem-se $\displaystyle\bigcup_{a\in\mathbb{R}^+}E_a=]1,+\infty[$ e $\displaystyle\bigcap_{a\in\mathbb{R}^+}E_a=]1,2]$.

5. (a) **Diga, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras para quaisquer conjuntos A, B e C.**

i. **Se $A \cap B \subseteq C$, então $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = \emptyset$.**

A afirmação é verdadeira.

No sentido de fazermos a prova por redução ao absurdo, admitamos que $A \cap B \subseteq C$ e que $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) \neq \emptyset$. Uma vez que $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) \neq \emptyset$, existe um objeto x tal que $x \in (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$. Então, atendendo a que

$$\begin{aligned} x \in (A \setminus C) \cap (B \setminus C) &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \wedge (x \in B \wedge x \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin C \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge x \notin C, \end{aligned}$$

conclui-se que $x \in A \cap B$ e $x \notin C$, o que contradiz $A \cap B \subseteq C$.

Logo, se $A \cap B \subseteq C$, então $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = \emptyset$.

ii. $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$.

A afirmação não é verdadeira.

Contra-exemplo: Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{2, 3\}$. Tem-se

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\} \setminus \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\} = \{\{1\}, \{1,2\}\}, \\ &\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}. \end{aligned}$$

Claramente, $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \nsubseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$, pois $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$ e $\{1, 2\} \notin \mathcal{P}(A \setminus B)$.

(b) **Sejam A, B e C conjuntos. Mostre que se $A \subseteq B$, então $(A \times C) \cup ((B \setminus A) \times C) = B \times C$.**

Tem-se

$$\begin{aligned} \forall (x,y), (x,y) \in (A \times C) \cup ((B \setminus A) \times C) &\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times C) \vee (x,y) \in ((B \setminus A) \times C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in (B \setminus A) \wedge y \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee (x \in B \setminus A)) \wedge y \in C && \text{(distributividade)} \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee (x \in B \wedge x \notin A)) \wedge y \in C \\ &\Leftrightarrow ((x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin A)) \wedge y \in C && \text{(distributividade)} \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C && \text{(elemento neutro da conjunção)} \\ &\Leftrightarrow x \in B \wedge y \in C && (*) \end{aligned}$$

(*) $\Rightarrow$) Se "$x \in A \vee x \in B$" é uma proposição verdadeira, então "$x \in B \vee x \in B$" é também uma proposição verdadeira, pois $A \subseteq B$; logo $x \in B$.
$\Leftarrow$) Se "$x \in B$" é uma proposição verdadeira, então "$x \in A \vee x \in B$" é também uma proposição verdadeira.

Assim, se $A \subseteq B$, $(A \times C) \cup ((B \setminus A) \times C) = B \times C$.

6. **Prove, por indução nos naturais, que, para todo o natural n,**

$$3 \times 7^0 + 3 \times 7^1 + 3 \times 7^2 + \ldots + 3 \times 7^n = \frac{7^{n+1} - 1}{2}.$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, representemos por $p(n)$ o predicado "$3 \times 7^0 + 3 \times 7^1 + 3 \times 7^2 + \ldots + 3 \times 7^n = \frac{7^{n+1}-1}{2}$".

(i) Base de indução (n=1): Para $n = 1$, tem-se

$$3 \times 7^0 + 3 \times 7^1 = 24 = \frac{7^2 - 1}{2}.$$

Logo $p(1)$ é verdadeiro.

(ii) Passo de indução: Seja $k \in \mathbb{N}$. Admitamos, por hipótese de indução, que $p(k)$ é verdadeiro, i.e., que

$$3 \times 7^0 + 3 \times 7^1 + 3 \times 7^2 + \ldots + 3 \times 7^k = \frac{7^{k+1} - 1}{2}.$$

Pretendemos mostrar que $p(k + 1)$ é verdadeiro, ou seja, que

$$3 \times 7^0 + 3 \times 7^1 + 3 \times 7^2 + \ldots + 3 \times 7^k + 3 \times 7^{k+1} = \frac{7^{k+2} - 1}{2}.$$

Da hipótese de indução segue que

$$\begin{aligned}
3\times 7^0+3\times 7^1+3\times 7^2+\ldots+3\times 7^k+3\times 7^{k+1} &= \tfrac{7^{k+1}-1}{2}+3\times 7^{k+1}\\
&= \tfrac{7^{k+1}-1+6\times 7^{k+1}}{2}\\
&= \tfrac{7\times 7^{k+1}-1}{2}\\
&= \tfrac{7^{k+2}-1}{2}
\end{aligned}$$

Logo, para todo $k \in \mathbb{N}$, se $p(k)$ é verdadeiro, então $p(k+1)$ é verdadeiro.

De (i), (ii) e Pelo Princípio de Indução em $\mathbb{N}$, conclui-se que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ é verdadeiro.