# Tópicos de Matemática

1º teste (15 de novembro de 2017) — duração: 2 horas

1. Considere que as variáveis proposicionais $p$, $q$ e $r$ representam as afirmações seguintes:

   $p$: A Maria tem 20 valores no teste.
   $q$: A Maria resolve todos os exercícios do livro.
   $r$: A Maria é aprovada na disciplina de Tópicos de Matemática.

   Recorrendo às variáveis anteriores, represente por fórmulas do Cálculo Proposicional as afirmações $F_1$, $F_2$ e $F_3$ a seguir indicadas.

   $F_1$: A Maria não resolve todos os exercícios do livro, mas é aprovada na disciplina de Tópicos de Matemática.

   $F_2$: A Maria não tem 20 valores no teste sempre que não resolve todos os exercícios do livro.

   $F_3$: A Maria é aprovada na disciplina de Tópicos de Matemática só se resolve todos os exercícios do livro e se tem 20 valores no teste.

2. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas, as afirmações seguintes.
   (a) A fórmula $(p \to \neg q) \wedge \neg(p \vee (q \leftrightarrow p))$ tem valor lógico verdadeiro sempre que $p$ tem valor lógico falso.
   (b) Se $\varphi$ e $\psi$ são fórmulas proposicionais logicamente equivalentes, então $\neg\varphi \to \neg(\varphi \vee \psi)$ é uma tautologia.

3. Considerando que $p$ representa a proposição $\forall_{x \in A}((\exists_{y \in A}\ x = 3 + y) \to (y \leq 0 \vee y \geq 2))$,
   (a) Diga, justificando, se $p$ é verdadeira para:
      (i) $A = \{-5, -2, 2, 5\}$;
      (ii) $A = \{-5, -2, 1, 4, \}$.
   (b) Indique, sem recorrer ao conetivo *negação*, uma proposição equivalente a $\neg p$.

4. Mostre que, para qualquer inteiro $n$, se $(n+1)^2$ não é múltiplo de $2$, então $3n^2 + 6n - 3$ não é múltiplo de $6$.

5. Considere os conjuntos

   $A = \{0, 17, \{5, 8\}\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{0, (\{5, 8\}, 1), \{17, 2\}, (0, 2), (2, 17)\}$, $D = \{x \in \mathbb{Z} : 2|x|+1 \in A\}$.

   (a) Determine $(A \times B) \cap C$.
   (b) Dê exemplo de um conjunto $E$ tal que $A \cap \mathcal{P}(E) \neq \emptyset$ e $D \setminus E = \emptyset$.

6. Diga, justificando, se cada uma das afirmações que se seguem é ou não verdadeira para quaisquer conjuntos $A$, $B$ e $C$.
   (a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
   (b) Se $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(C)$, então $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$.
   (c) Se $A \setminus B = A \setminus C$, então $A \cap B = A \cap C$.

7. Prove, por indução nos naturais, que, para todo o natural $n$,

$$3 \cdot 8 + 6 \cdot 11 + \ldots + 3n(3n+5) = 3n(n+1)(n+3).$$

Cotações: 1. (1,5); 2. (1,75+1,5); 3. (1,75+1,5); 4. (2,0); 5. (1,5+1,5); 6. (1,5+1,5+1,5); 7. (2,5).