Tópicos de Matemática

Proposta de resolução - 1º teste (15 de novembro de 2017) — duração: 2 horas

1. **Considere que as variáveis proposicionais p, q e r representam as afirmações seguintes:**

   p: **A Maria tem 20 valores no teste.**
   q: **A Maria resolve todos os exercícios do livro.**
   r: **A Maria é aprovada na disciplina de Tópicos de Matemática.**

   Recorrendo às variáveis anteriores, represente por fórmulas do Cálculo Proposicional as afirmações F_1, F_2 e F_3 a seguir indicadas.

   F_1: **A Maria não resolve todos os exercícios do livro, mas é aprovada na disciplina de Tópicos de Matemática.**

   F_2: **A Maria não tem 20 valores no teste sempre que não resolve todos os exercícios do livro.**

   F_3: **A Maria é aprovada na disciplina de Tópicos de Matemática só se resolve todos os exercícios do livro e se tem 20 valores no teste.**

   As frases F_1, F_2 e F_3 são representadas, respetivamente, pelas fórmulas

   $$((\neg q) \wedge r),\ \ ((\neg q) \to (\neg p)) \ \text{ e } \ (r \to (p \wedge q)).$$

2. **Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas, as afirmações seguintes.**

   (a) **A fórmula $(p \to \neg q) \wedge \neg(p \vee (q \leftrightarrow p))$ tem valor lógico verdadeiro sempre que p tem valor lógico falso.**

   Quando p tem valor lógico falso, a variável proposicional q pode ter valor lógico verdadeiro ou falso. Analisando estes dois casos, conclui-se que a fórmula $\varphi : (p \to \neg q) \wedge \neg(p \vee (q \leftrightarrow p))$ não tem necessariamente valor lógico verdadeiro quando p tem valor lógico falso.

p	q	$\neg q$	$p \to \neg q$	$q \leftrightarrow p$	$p \vee (q \leftrightarrow p)$	$\neg(p \vee (q \leftrightarrow p))$	φ
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0	0

   De facto, quando p e q são falsas, a fórmula φ também é falsa.
   Logo, a afirmação é falsa.

   (b) **Se φ e ψ são fórmulas proposicionais logicamente equivalentes, então $\neg\varphi \to \neg(\varphi \vee \psi)$ é uma tautologia.**

   Se φ e ψ são fórmulas logicamente equivalentes, então $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia, pelo que as fórmulas φ e ψ têm o mesmo valor lógico (são ambas verdadeiras ou ambas falsas) para cada combinação de valores lógicos atribuídos às variáveis de φ e ψ. Sendo assim, temos dois casos a considerar:

   (1) φ e ψ têm valor lógico 0;
   (2) φ e ψ têm valor lógico 1.

   Caso (1): Se φ e ψ têm valor lógico 0, então $\varphi \vee \psi$ tem valor lógico 0, pelo que $\neg(\varphi \vee \psi)$ tem valor lógico 1. Logo $\neg\varphi \to \neg(\varphi \vee \psi)$ tem valor lógico 1.
   Caso (2): Se φ e ψ têm valor lógico 1, então $\neg\varphi$ tem valor lógico 0, pelo que $\neg\varphi \to \neg(\varphi \vee \psi)$ tem valor lógico 1.

   Atendendo a que a fórmula $\neg\varphi \to \neg(\varphi \vee \psi)$ tem sempre valor lógico 1, independentemente do valor lógico das variáveis que nela ocorrem, concluímos que esta fórmula é uma tautologia.
   Assim, a afirmação é verdadeira.

3. **Considerando que p representa a proposição $\forall_{x \in A}((\exists_{y \in A}\ x = 3 + y) \to (y \leq 0 \vee y \geq 2))$,**

   (a) **Diga, justificando, se p é verdadeira para:**

(i) $A = \{-5, -2, 2, 5\}$;

A afirmação é verdadeira para A se, para cada $x \in A$, a implicação

$$(\exists_{y \in A}\ x = 3 + y) \rightarrow (y \leq 0 \vee y \geq 2)$$

é verdadeira.

$x = -5$: Não existe $y \in A$ tal que $x = 3 + y$, pelo que a proposição $\exists_{y \in A}\ x = 3 + y$ é falsa. Logo, a implicação $(\exists_{y \in A}\ x = 3 + y) \rightarrow (y \leq 0 \vee y \geq 2)$ é verdadeira.

$x = -2$: Tem-se $-2 = 3 + (-5)$ e $-5 \in A$. Logo a proposição $\exists_{y \in A}\ x = 3 + y$ é verdadeira. Uma vez que $-5 \leq 0$, a proposição $y \leq 0 \vee y \geq 2$ também é verdadeira. Logo, a implicação $(\exists_{y \in A}\ x = 3 + y) \rightarrow (y \leq 0 \vee y \geq 2)$ é verdadeira.

$x = 2$: Não existe $y \in A$ tal que $x = 3 + y$, pelo que a proposição $\exists_{y \in A}\ x = 3 + y$ é falsa. Logo, a implicação $(\exists_{y \in A}\ x = 3 + y) \rightarrow (y \leq 0 \vee y \geq 2)$ é verdadeira.

$x = 5$: Tem-se $5 = 3 + 2$ e $2 \in A$. Logo a proposição $\exists_{y \in A}\ x = 3 + y$ é verdadeira. Uma vez que $y \geq 2$, a proposição $y \leq 0 \vee y \geq 2$ também é verdadeira. Logo, a implicação $(\exists_{y \in A}\ x = 3 + y) \rightarrow (y \leq 0 \vee y \geq 2)$ é verdadeira.

Logo a proposição p é verdadeira para A.

(ii) $A = \{-5, -2, 1, 4, \}$.

A afirmação é verdadeira para A se, para cada $x \in A$, a implicação

$$(\exists_{y \in A}\ x = 3 + y) \rightarrow (y \leq 0 \vee y \geq 2)$$

é verdadeira.

Considerando $x = 4$ tem-se $x = 3 + 1$. Então, uma vez que $x = 3 + 1$ e $1 \in A$, a proposição $\exists_{y \in A}\ x = 3 + y$ é verdadeira. Porém, a proposição $y \leq 0 \vee y \geq 2$ é falsa, pelo que a implicação $(\exists_{y \in A}\ x = 3 + y) \rightarrow (y \leq 0 \vee y \geq 2)$ é falsa.

Logo a proposição p é falsa para A.

(b) **Indique, sem recorrer ao conetivo *negação*, uma proposição equivalente a $\neg p$.**

$$\neg p \Leftrightarrow \exists_{x \in A}\ (\exists_{y \in A}\ x = 3 + y \wedge (y > 0 \wedge y < 2)).$$

4. **Mostre que, para qualquer inteiro n, se $(n+1)^2$ não é múltiplo de 2, então $3n^2 + 6n - 3$ não é múltiplo de 6.**

Sejam $p(n)$ e $q(n)$ os predicados

$p(n)$: $(n+1)^2$ não é múltiplo de 2;
$q(n)$: $3n^2 + 6n - 3$ não é múltiplo de 6.

Pretendemos mostrar que a proposição $\forall_{n \in \mathbb{N}}\ (p(n) \rightarrow q(n))$ é verdadeira. No sentido de fazer a prova por redução ao absurdo, admitamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(n+1)^2$ não é múltiplo de 2 e $3n^2 + 6n - 3$ é múltiplo de 6. Uma vez que $3n^2 + 6n - 3$ é múltiplo de 6, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $3n^2 + 6n - 3 = 6k$, donde segue que $3(n+1)^2 - 6 = 6k$. Logo $(n+1)^2 = 2(k+1)$, com $k + 1 \in \mathbb{N}$ e, portanto, $(n+1)^2$ é múltiplo de 2 (o que contradiz a hipótese de que $(n+1)^2$ não é múltiplo de 2).

5. **Considere os conjuntos**

$$A = \{0, 17, \{5, 8\}\}, \quad B = \{1, 2\}, \quad C = \{0, (\{5, 8\}, 1), \{17, 2\}, (0, 2), (2, 17)\}, \quad D = \{x \in \mathbb{Z} : 2|x| + 1 \in A\}.$$

(a) **Determine $(A \times B) \cap C$.**

Uma vez que

$$A \times B = \{(0, 1), (0, 2), (17, 1), (17, 2), (\{5, 8\}, 1), (\{5, 8\}, 2)\},$$

tem-se $(A \times B) \cap C = \{(0, 2), (\{5, 8\}, 1)\}$.

(b) **Dê exemplo de um conjunto E tal que $A \cap \mathcal{P}(E) \neq \emptyset$ e $D \setminus E = \emptyset$.**

Atendendo a que $D = \{x \in \mathbb{Z} \ : \ 2|x| + 1 \in A\}$ e, para todo $x \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} 2|x| + 1 \in A &\Leftrightarrow 2|x| + 1 = 0 \vee 2|x| + 1 = 17 \vee 2|x| + 1 = \{5, 8\} \\ &\Leftrightarrow i(x) \vee (x = -8 \vee x = 8) \vee i(x) \\ &\Leftrightarrow x = -8 \vee x = 8. \end{aligned}$$

tem-se $D = \{-8, 8\}$.

Logo,

$$D \setminus E = \emptyset \text{ se e só se } \{-8, 8\} \subseteq E.$$

Por outro lado,

$$A \cap \mathcal{P}(E) \neq \emptyset \text{ se e só se } \{5, 8\} \in \mathcal{P}(E) \text{ se e só se } \{5, 8\} \subseteq E.$$

Assim, $E = \{-8, 5, 8\}$ é exemplo de um conjunto tal que $D \setminus E = \emptyset$ e $A \cap \mathcal{P}(E) \neq \emptyset$ ($A \cap \mathcal{P}(E) = \{\{5, 8\}\}$).

6. **Diga, justificando, se cada uma das afirmações que se seguem é ou não verdadeira para quaisquer conjuntos A, B e C.**

(a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

A afirmação é verdadeira.

$$\begin{aligned} \forall_{(x,y)} \ (x, y) \in (A \cup B) \times C &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \ \wedge \ y \in C && \big(\text{definição de produto cartesiano}\big) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C && \big(\text{definição de união}\big) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C) && \big(\text{propriedade distributiva da conjunção em relação à disjunção}\big) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in A \times C \vee (x, y) \in B \times C && \big(\text{definição de produto cartesiano}\big) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C) && \big(\text{definição de união}\big). \end{aligned}$$

Logo $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

(b) **Se $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(C)$, então $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$.**

A afirmação é falsa.

Contra-exemplo: Sejam $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ e $C = \{1\}$. Então $A \cap B = \{1\}$ e, claramente, $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(C)$, pois $\mathcal{P}(A \cap B) = \{\emptyset, \{1\}\} = \mathcal{P}(C)$. No entanto, $A \nsubseteq C$ (pois $2 \in A$ e $2 \notin C$).

(c) **Se $A \setminus B = A \setminus C$, então $A \cap B = A \cap C$.**

A afirmação é verdadeira.

Admitamos que $A \setminus B = A \setminus C$. Então prova-se que $A \cap B = A \cap C$. De facto, se x é um objeto tal que $x \in A \cap B$, então $x \in A \wedge x \in B$ é uma proposição verdadeira. Logo $x \notin A \setminus B$. Consequentemente, como $A \setminus B = A \setminus C$, tem-se que $x \notin A \setminus C$, pelo que a proposição $x \notin A \vee x \in C$ é verdadeira. Mas $x \notin A$ é uma proposição falsa e, portanto, $x \in C$. Assim, $x \in A \wedge x \in C$ é uma proposição verdadeira, pelo que $x \in A \cap C$. Logo, $A \cap B \subseteq A \cap C$. De modo análogo prova-se que $A \cap C \subseteq A \cap B$.

7. **Prove, por indução nos naturais, que, para todo o natural n,**

$$3 \cdot 8 + 6 \cdot 11 + \ldots + 3n(3n + 5) = 3n(n + 1)(n + 3).$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $p(n)$ o predicado

$$p(n) : 3 \cdot 8 + 6 \cdot 11 + \ldots + 3n(3n + 5) = 3n(n + 1)(n + 3).$$

Pretendemos mostrar que a proposição $\forall_{n \in \mathbb{N}} \ p(n)$ é verdadeira. A prova é feita por indução nos naturais.

(1) Base de indução ($n = 1$): Para $n = 1$, tem-se

$$(3 \times 1) \times (3 \times 1 + 5) = 24 = (3 \times 1) \times (1 + 1) \times (1 + 3),$$

pelo que $p(1)$ é verdadeiro.

(2) Passo de indução: Seja $k \in \mathbb{N}$. Admitamos, por hipótese de indução, que, $p(k)$ é verdadeiro, isto é, que

$$3 \cdot 8 + 6 \cdot 11 + \ldots + 3k(3k + 5) = 3k(k + 1)(k + 3).$$

Pretendemos mostrar que $p(+1)$ é verdadeiro, ou seja, que

$$3 \cdot 8 + 6 \cdot 11 + \ldots + 3k(3k+5) + 3(k+1)(3(k+1)+5) = 3(k+1)((k+1)+1)((k+1)+3).$$

Ora, atendendo a que $p(k)$ é verdadeiro, tem-se

$$\begin{array}{rcl} 3 \cdot 8 + 6 \cdot 11 + \ldots + 3k(3k+5) + 3(k+1)(3(k+1)+5) & = & 3k(k+1)(k+3) + 3(k+1)(3(k+1)+5) \\ & = & 3(k+1)[k(k+3) + (3(k+1)+5)] \\ & = & 3(k+1)(k^2+6k+8) \\ & = & 3(k+1)(k+2)(k+4) \\ & = & 3(k+1)((k+1)+1)((k+1)+3). \end{array}$$

Logo,

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} \quad p(k) \Rightarrow p(k+1).$$

De (1), (2) e do Princípio de Indução para $\mathbb{N}$, concluímos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ é verdadeiro.

Cotações: 1. (1,5); 2. (1,75+1,5); 3. (1,75+1,5); 4. (2,0); 5. (1,5+1,5); 6. (1,5+1,5+1,5); 7. (2,5).