Universidade do Minho | Lic. em Ciências da Computação
Departamento de Matemática e Aplicações | 2016/2017

Tópicos de Matemática

1º teste (7 de novembro de 2016) — duração: 2h00

1. Diga, justificando, se cada uma das afirmações que se seguem é ou não verdadeira.
   (a) A fórmula $((p \vee \neg q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow \neg r)$ não é uma tautologia nem é uma contradição.
   (b) O argumento
   $$\begin{array}{c} p \vee \neg q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore (p \wedge q) \rightarrow \neg r \end{array}$$
   é válido.

2. (a) Considerando que o domínio de variação de m e n é o conjunto dos números inteiros, traduza a seguinte quantificação para linguagem simbólica:

   Para qualquer inteiro m, se $mn = m$ para algum inteiro não nulo n, então $n = 1$.

   (b) Considerando que p representa a proposição $\forall_{a \in A}(a < 0 \rightarrow \exists_{b \in B}\ (b = |a| \vee b < a))$:
   i. Verifique se p é verdadeira para $A = \{-5, -3, -1, 0, 1\}$ e $B = \{-4, 1, 3, 5\}$. Justifique.
   ii. Indique, sem recorrer ao conetivo *negação*, uma proposição equivalente a $\neg p$.

3. Seja n um inteiro. Mostre que se $n^2 - (n-2)^2$ não é divisível por 8, então n é par. Qual foi o método de prova que usou?

4. (a) Considere os conjuntos
   $$A = \{1, \{2\}\}, \quad B = \{3n \mid n \in \mathbb{Z} \wedge n^2 \in C\}, \quad C = \{1, 2, 16\} \text{ e } D = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2 \in C \wedge y = 3x\}.$$
   i. Determine B e D.
   ii. Verifique se $(1, 2, 1) \in A \times (C \setminus A) \times A$. Justifique.
   iii. Determine $\mathcal{P}(C) \cap A$.

   (b) Dê um exemplo de uma família de conjuntos $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de tal modo que os conjuntos da família sejam todos diferentes entre si e
   $$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{0\} \text{ e } \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é } par\}.$$

5. Diga se cada uma das afirmações que se seguem é verdadeira para quaisquer conjuntos A, B e C. Justifique as suas respostas.
   (a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
   (b) Se $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A)$, então $B \subseteq A$.

6. Sejam A, B e C conjuntos. Mostre que $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

7. Prove que, para todo o natural n,
   $$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots n \cdot (3n + 1) = n(n + 1)^2.$$

Cotação: 1-(1,5+1,5); 2-(1,0+1,5+1,25); 3-(1,75); 4-(1,25+1,25+1,25+1,25); 5-(1,25+1,25); 6-(2,0); 7-(2,0).