Universidade do Minho | Licenciatura em Ciências da Computação
Departamento de Matemática e Aplicações | 2011/2012

Tópicos de Matemática

primeiro teste - versão **A** :: 30 de novembro de 2011

IMPORTANTE: A duração do teste é de **2 horas**. O teste é composto por oito exercícios. Os exercícios **1.-5.** devem ser resolvidos no enunciado. Os exercícios **6.-8.** devem ser resolvidos numa folha separada. Nos exercícios em que a cotação não é indicada no enunciado, cada resposta certa conta 0,75 valores e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

Nome:	**Número:**

exercício 1. Indique quais das seguintes fórmulas são tautologias (T) e quais não são tautologias (N).

T	N	
☐	☐	$(p \Leftrightarrow \neg p) \wedge (q \vee \neg q)$
☐	☐	$(\neg p \wedge (p \vee q)) \Rightarrow q$
☐	☐	$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

exercício 2. Considere a fórmula $\varphi : (\neg q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \wedge (q \vee \neg r))$. Indique quais das seguintes condições são necessárias para que φ tenha um valor lógico verdadeiro (N) e quais são suficientes (S).

N	S	
☐	☐	$r \Rightarrow q$ tem valor lógico verdadeiro.
☐	☐	$p \wedge q \wedge r$ tem valor lógico verdadeiro.
☐	☐	$\neg p \wedge r$ tem valor lógico falso.

exercício 3. Considere a seguinte proposição, em que o universo de cada uma das quantificações é um subconjunto U de $\mathbb{N}_0$:

$$p : \quad \forall x \forall y \forall z \quad (xy = xz) \Rightarrow (y = z)$$

Indique para quais dos seguintes universos de quantificação a proposição p é verdadeira (V) e para quais é falsa (F).

V	F	
☐	☐	$U = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é ímpar}\}$
☐	☐	$U = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$
☐	☐	$U = \{x \in \mathbb{N} : x^2 + 4 = 0\}$

exercício 4. Considere a seguinte proposição, em que o universo de cada uma das quantificações é o conjunto dos números reais:

$$q: \quad \forall x \forall y (y > x \Rightarrow \exists z : x + z < y)$$

Indique quais das seguintes proposições são equivalentes à negação da proposição q (E) e quais não são equivalentes (N).

E	N	
□	□	$\exists x \exists y \ (y > x \wedge (\forall z, x + z \geq y))$
□	□	$\exists x \exists y \ (y \leq x \Rightarrow (\forall z, x + z \geq y))$
□	□	$\exists x \exists y \ (y \leq x \vee (\exists z : x + z < y))$

exercício 5. Considere o conjunto $A = \{1, \{1\}, \{2, 1\}, (1, 2)\}$. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
□	□	$(2, 1) \in A$
□	□	$\{1\} \in A$ e $\{1\} \subseteq A$
□	□	$\{1, 2\} \in A$ ou $\{1, 2\} \subseteq A$

exercício 6. (1,5 valores) Recorrendo a um dos métodos de prova estudados nas aulas, prove a seguinte afirmação: "*Se x e y são inteiros tais que $7x + 3y = 20$ e $x \neq 2$, então $y \neq 2$.*".

exercício 7. Considere os conjuntos $A = \{3, \{-3\}, \{\emptyset\}\}$, $B = \{-1, 1, 2\}$ e $C = \{3x : x \in B \wedge x^2 \in B\}$.

(a) (0,75 valores) Determine C.

(b) (0,75 valores) Determine $A \cap \mathcal{P}(C)$.

(c) (0,75 valores) Determine $B \times (A \setminus \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$

exercício 8. Sejam A, B e C conjuntos. Diga, justificando, se cada uma das afirmações que se seguem é ou não verdadeira.

(a) (1,25 valores) Se $A \cap B = A \cap C$, então $(A \cap B) \setminus C = \emptyset$.

(b) (1,25 valores) $\mathcal{P}(A \setminus B) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A)$.

(c) (1,25 valores) $A \times B = A \times C \Rightarrow B = C$.

(d) (1,25 valores) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \setminus C)$.