# Tópicos de Matemática

1º Teste

26/11/2010

(duração: 1h45)

**Justifique convenientemente todas as suas respostas.**

1. Considerando que as variáveis proposicionais $p_0, p_1, p_2, p_3$ representam as frases atómicas

$p_0$ : O cão foge. $\quad$ $p_1$ : O portão está aberto.

$p_2$ : A Ana fecha o portão. $\quad$ $p_3$ : O João fecha o portão.

represente por fórmulas proposicionais as frases seguintes

   (a) "O cão foge sempre que o portão está aberto."

   (b) "O portão está aberto só se a Ana não o fecha ou o João não o fecha."

2. Considere a fórmula proposicional $\varphi : (p \wedge \neg r) \vee ((q \vee r) \Rightarrow p)$.

   (a) Diga se a fórmula $\varphi$ é uma tautologia.

   (b) Diga se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: "Se a fórmula $\varphi$ tem o valor lógico verdadeiro, então a variável proposicional $r$ tem necessariamente o valor lógico falso".

3. Considerando que $p$ representa a proposição

$$\forall x \forall y \ \ ((x = y) \Rightarrow \exists z \ \ z \neq x)$$

   (a) Indique um universo para as variáveis $x, y, z$ onde a proposição $p$ seja verdadeira e outro onde $p$ seja falsa.

   (b) Indique em linguagem simbólica, sem recorrer ao símbolo de negação, uma proposição equivalente à negação de $p$.

4. Recorrendo a um dos métodos de prova estudados nas aulas, prove a seguinte afirmação:

"Se $a, b$ são reais positivos tais que $ab = c$, então $a \leq \sqrt{c}$ ou $b \leq \sqrt{c}$."

5. Sejam

$$A = \{2, 3, 4\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in A : y = x + 2\},$$
$$C = \{1, (1, 2), \{1\}\}, \qquad D = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \in A \ \wedge \ x = y^2\}.$$

   (a) Diga se é verdade que $(\mathcal{P}(B) \setminus \mathcal{P}(A)) \cup (B \setminus A) = C$.

   (b) Dê exemplo, ou justifique que não existe, um conjunto $X$ tal que

$$D \setminus (A \times B) \subseteq X \subseteq \{(4, 2), (2, 2)\}.$$

6. Sejam $A, B, C$ conjuntos. Indique quais das seguintes afirmações são necessariamente verdadeiras e quais podem ser falsas:

   (a) Se $A \cap B \cap C = \emptyset$, então $A \cap B = \emptyset \vee A \cap C = \emptyset$.

   (b) Se $A \cap B = A \cap (B \setminus C)$, então $A \cap B \cap C = \emptyset$.

   (c) Os conjuntos $\mathcal{P}(A \cup B)$ e $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ têm o mesmo número de elementos.

   (d) $\mathcal{P}(A \times B) = \{X \times Y \mid X \in \mathcal{P}(A) \ \wedge \ Y \in \mathcal{P}(B)\}$.

7. Sejam $A$, $B$ conjuntos. Mostre que $(A \times B) \setminus (B \times B) = (A \setminus B) \times B$.

**Cotação:**

**1.** (1,5 valores) **2.** (3,0 valores) **3.** (3,5 valores) **4.** (1,75 valores)

**5.** (3,0 valores) **6.** (5,5 valores) **7.** (1,75 valores)