Universidade do Minho
Departamento de Matemática

22 de janeiro de 2020

# Tópicos de Matemática

Licenciatura em Ciências da Computação

Exame (Época de Recurso)

duração: 2h15min

1. (a) Diga, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras:
   i. A variável proposicional $p$ tem valor lógico verdadeiro só se a fórmula $\varphi : ((p \to (p \vee \neg q)) \wedge q) \to \neg p$ tem valor lógico verdadeiro.
   ii. Se $\sigma$, $\phi$ e $\psi$ são fórmulas proposicionais tais que uma das fórmulas $\sigma \to \neg\phi$ ou $\sigma \to \psi$ é uma tautologia, então $(\sigma \wedge \phi) \to \psi$ é uma tautologia.

   (b) Considere que $p$ representa a proposição $\exists_{x \in D}\, (\forall_{y \in D}\ (y > x \to y + x$ é ímpar$))$. Diga, justificando, se $p$ é verdadeira para $D = \{3, 4, 5, 6, 8\}$.

2. Considere os conjuntos $A = \{1, 3, 7, 8, \{5, 8\}, \{4, 7\}\}$, $B = \{x + 4 \,|\, x \in \mathbb{Z} \wedge 2x + 1 \in A\}$ e $C = \{1, 7, 8\}$. Justificando, determine $((A \setminus \mathcal{P}(B)) \setminus C) \times C$.

3. Sejam $A$, $B$ e $C$ conjuntos tais que $C \subseteq A$. Mostre que $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup C$.

4. Prove, por indução nos naturais, que $8^n - 3^n$ é um múltiplo de $5$, para todo o natural $n$.

5. Considere a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por
$$f(n) = \begin{cases} (n, n+1) & \text{se } n \text{ é par} \\ (n+1, n+2) & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

   (a) Justificando, defina por extensão, $f\big(\{0, 1\}\big) \cap f\big(\{2, 3\}\big)$ e $f^{\leftarrow}\,(\{(0, 1), (1, 2)\})$.

   (b) Diga, justificando, se $f$ é injetiva e se é sobrejetiva. Justifique que não existe qualquer função $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $g \circ f = id_{\mathbb{Z}}$.

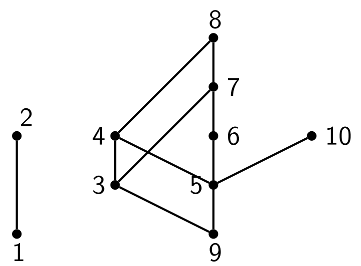
6. Dê exemplo de relações binárias $R'$ e $S'$ num conjunto $A$ tais que $S' \circ R' \nsubseteq R' \circ S'$.
Mostre que se $R$ e $S$ são relações binárias num conjunto $A$ tais que $R$, $S$ e $R \circ S$ são relações simétricas, então $S \circ R \subseteq R \circ S$.

7. Seja $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   (a) Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes:
   i. Para toda a relação de equivalência $\rho$ em $A$,
$$(\exists_{k \in A}\ [2]_\rho \cap [k]_\rho \neq \emptyset \text{ e } [3]_\rho \cap [k]_\rho \neq \emptyset) \Rightarrow [2]_\rho = [3]_\rho.$$
   ii. Existe uma relação de equivalência $\rho$ em $A$ tal que $A/\rho = \{A, A \setminus \{1\}\}$.

   (b) Seja $R$ a relação de equivalência definida em $A$ por
$$x\,R\,y \text{ se só se } xy^{-1} \in \{-1, 1\}.$$
   Determine $[2]_R$ e $A/R$.

8. Considere o c.p.o. $(A, \leq)$, onde $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e $\leq$ é a relação de ordem parcial definida pelo diagrama de Hasse




Indique, caso exista(m):

   (a) os elementos maximais e os elementos minimais de $A$, o supremo de $\{3, 5\}$ e o ínfimo de $\{4, 6\}$.

   (b) um subconjunto $B$ de $A$ tal que $B$ tenha elemento máximo e elemento mínimo e $(B, \leq_{|_B})$ não seja um reticulado.

9. Sejam $A$ e $B$ conjuntos. Mostre que se $B$ não é contável e existe uma função sobrejetiva $f : A \to B$, então $A$ não é contável.

Cotação:
1-(1,25+1,25+1,25); 2-(1,25); 3-(1,5); 4-(1,75); 5-(1,5+1,5); 6-(1,75); 7-(0,75+0,75+1,25); 8-(1,5+1,0); 9-(1,75).