Tópicos de Matemática

Exame de recurso (22 de janeiro de 2018) — duração: 2h30

1. Considere as fórmulas proposicionais $\varphi : \neg(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ e $\psi : \neg p \vee q$. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as afirmações que se seguem.

   (a) As fórmulas φ e ψ são logicamente equivalentes.

   (b) Qualquer que seja a fórmula proposicional σ o argumento

   $$\begin{array}{c} \neg\varphi \rightarrow \sigma \\ \neg\sigma \\ \hline \therefore \psi \end{array}$$

   é válido.

2. Considerando que A é um subconjunto de $\mathbb{R}$ e que p representa a proposição

   $$p : \exists_{x \in A} \forall_{y \in A} \; (y \neq 0 \rightarrow xy = 1),$$

   dê exemplo de um conjunto A, com pelo menos dois elementos, onde: i. p seja falsa. ii. p seja verdadeira.

3. Considere os conjuntos

   $$A = \{1, 5, \{1, 7\}, \emptyset\},\ B = \{1, 7\},\ C = \{1, 5, \{\emptyset\}\} \text{ e } D = \{n + 2 \mid n \in \mathbb{Z} \wedge n^2 \in B\}.$$

   Determine $((A \setminus B) \setminus C) \times \mathcal{P}(D)$.

4. (a) Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a afirmação que se segue: Para quaisquer conjuntos A, B e C, $(A \times B) \setminus (C \times C) = (A \setminus C) \times (B \setminus C)$.

   (b) Sejam A, B e C conjuntos tais que $A \cap B = \emptyset$ e $C \subseteq A$. Mostre que se $A \cup B \subseteq C \cup D$, então $B \subseteq D$.

5. Prove, por indução nos naturais, que

   $$5 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + \ldots + 5 \cdot n = \frac{5n(n + 1)}{2},$$

   para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

6. Considere a função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por

   $$f(n) = \begin{cases} 2n - 1 & \text{se} \quad n \geq 3 \\ n + 1 & \text{se} \quad n \in \{0, 1, 2\} \\ -2n & \text{se} \quad n < 0 \end{cases}$$

   (a) Determine $f(\mathbb{Z}) \setminus f(\{-1, 1, 5\})$.

   (b) Dê exemplo de um subconjunto A de $\mathbb{Z}$ tal que $f^{\leftarrow}(f(A)) \neq A$.

   (c) Diga se a função f é sobrejetiva. A função f é invertível? Justifique.

7. Sejam R e S as relações binárias em $\mathbb{Z}$ definidas por

   $$(a, b) \in R \text{ se e só se } a = b + 1 \text{ ou } a = b - 1 \quad \text{e} \quad S = \{(1, 2), (4, 3), (4, 2), (7, 5), (7, 6)\}.$$

   (a) Diga, justificando, se a relação R é simétrica e se é transitiva.

   (b) Determine $(S \circ S^{-1}) \cap R$.

8. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

   (a) Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes:

      i. Existe uma relação de equivalência ρ em A tal que $A/\rho = \{\{1, 2, 7, 9\}, \{4, 6\}, \{3, 5, 8, 10\}\}$.

      ii. Existe uma relação de equivalência ρ em A tal que $[2]_\rho = \{1, 2, 5, 6\}$ e $[4]_\rho = \{2, 3, 4, 7\}$.

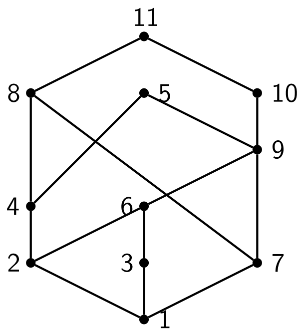
   (b) Seja ρ a relação de equivalência definida em A por

   $$x \, \rho \, y \Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ têm o mesmo número de divisores naturais primos.}$$

   Determine $[2]_\rho$ e A/ρ.

$\overrightarrow{(v.s.f.f)}$

9. Considere o c.p.o. $(A, \leq)$, onde $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ e $\leq$ é a relação de ordem parcial definida pelo diagrama de Hasse



   (a) Indique, caso existam:
      i. os elementos maximais e os elemento minimais de $A \setminus \{1, 3\}$.
      ii. os majorantes de $\{2, 7\}$ e o supremo de $\{2, 7\}$.
   (b) Dê exemplo de um subconjunto B de A tal que $(B, \leq_{|B})$ seja um reticulado mas não seja uma cadeia.

10. Seja A um conjunto. Mostre que se A é numerável, então $A \sim B$, para todo o subconjunto infinito B de A.

Cotações	1.	2.	3.	4.	5	6.	7.	8.	9.	10.
	1,0 + 1,0	1,0	1,0	1,0 + 1,5	1,75	1,25 + 1,0 + 1,0	1,25 + 1,0	0,75 + 0,75 + 1,25	0,75 + 0,75 + 0,75	1,25