Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Lic. em Ciências da Computação
2016/2017

Tópicos de Matemática

Exame de recurso (23 de janeiro de 2017) — duração: 2h30

1. Considere as fórmulas $\varphi : (p \to q) \to r$ e $\psi : p \wedge (\neg q \vee r)$. Diga, justificando, se a afirmação seguinte é ou não verdadeira: A variável proposicional r tem valor lógico verdadeiro sempre que a fórmula $\varphi \wedge \psi$ tem valor lógico verdadeiro.
   Diga se o argumento
   $$\begin{array}{c} (p \to q) \to r \\ p \wedge (\neg q \vee r) \\ \hline \therefore r \end{array}$$
   é válido. Justifique a sua resposta.

2. Considerando que A é um subconjunto de $\mathbb{Z}$ e que p representa a proposição
   $$\exists_{x \in A} \forall_{y \in A} (x \neq y \to (\exists_{z \in A}\, (z \neq x) \wedge (x + z \leq y))$$
   (a) Dê exemplo de um conjunto A com pelo menos dois elementos e onde a proposição p é verdadeira. Justifique a sua resposta.
   (b) Indique, sem recorrer ao conetivo *negação*, uma proposição equivalente a $\neg p$.

3. Considere os conjuntos
   $$A = \{\{1\}, 3, 4, \{2, 9\}, (2, 12)\},\ B = \{1, 2\},\ C = \{3n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \in A\} \text{ e } D = \{\{1\}, 2, 9\}.$$
   Determine:
   (a) $(B \times C) \cap A$.
   (b) $A \setminus \mathcal{P}(D)$.

4. (a) Diga, justificando, se a afirmação que se segue é ou não verdadeira: Para quaisquer conjuntos A, B e C, $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$.
   (b) Sejam A, B e C conjuntos. Mostre que se $A \cap B = A \setminus (B \cap C)$, então $A \cap B \cap C = \emptyset$. Qual foi o método de prova que usou?

5. Prove, por indução nos naturais, que $3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^n = \dfrac{3^{n+1} - 3}{2}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

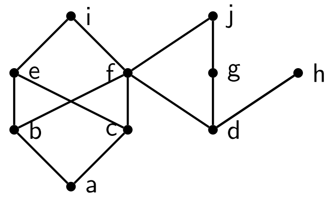
6. Considere a função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por
   $$f(m, n) = \begin{cases} n + 1 & \text{se} \quad m = 1 \\ 2n & \text{se} \quad m \neq 1 \end{cases}$$
   (a) Determine $f(\{(1, 5), (2, 3)\})$, $\mathbb{Z} \setminus f(\{(1, n) \mid n \in \mathbb{Z}\})$ e $f^{\leftarrow}(\{1, 4\})$.
   (b) Diga, justificando, se a função f é injetiva e se é sobrejetiva.
   (c) Diga se existe alguma função $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $h \circ f$ é injetiva. Justifique a sua resposta.

7. Sejam $A = \{a, b, c, d, e\}$ e R a relação binária em A definida por
   $$R = \{(a, c), (b, d), (c, a), (c, c), (d, c), (d, e)\}.$$
   (a) Dê exemplo de, ou justifique que não existe, uma relação binária S em A tal que $R \cap S$ é simétrica e antissimétrica.
   (b) Diga, justificando, se a relação $R \circ R^{-1}$ é reflexiva.

8. Seja R a relação de equivalência definida em $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ por
   $$X \, R \, Y \text{ se e só se } X \cap \{1, 3\} = Y \cap \{1, 3\}.$$
   Determine $[\{3\}]_R$ e $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})/R$.

$\overrightarrow{(v.s.f.f)}$

9. Considere o c.p.o. $(P, \leq)$ representado pelo seguinte diagrama de Hasse:



   (a) Indique, sem justificar:

      i. os elementos maximais e os elemento minimais de $\{a, f, g, h, j\}$;

      ii. o conjunto dos majorantes de $\{b, c, d\}$ e o supremo de $\{b, c, d\}$;

   (b) Diga se o c.p.o. $(P, \leq)$ é bem ordenado. Justifique a sua resposta.

10. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes:

   (a) Para quaisquer conjuntos A, B, C e D, se $A \sim B$ e $C \sim D$, então $A \cup C \sim B \cup D$.

   (b) Se A e B são conjuntos tais que A não é contável e $B \sim \mathbb{N}$, então $A \setminus B$ não é contável.

Cotação: 1-(1,25); 2-(1,0+0,75); 3-(1,0+1,0); 4-(1,0+1,5); 5-(1,5); 6-(1,5+1,0+0,75); 7-(0,75+1,0); 8-(1,25); 9-(1,0+1,0+0,75); 10-(1,0+1,0).