Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Licenciatura em Ciências da Computação
2011/2012

Tópicos de Matemática

exame - versão **A** :: 8 de fevereiro de 2012

IMPORTANTE: A duração do teste é de **2 horas**. O teste é composto por nove exercícios. Os exercícios **1.-4.** devem ser resolvidos no enunciado. Os exercícios **5.-9.** devem ser resolvidos numa folha separada. Nos exercícios em que a cotação não é indicada no enunciado, cada resposta certa conta 0,5 valores e cada resposta errada desconta 0,2 valores.

Nome:	**Número:**

exercício 1. Considere as fórmulas $\varphi : (p \wedge q) \vee r$ e $\psi : p \wedge (q \vee r)$. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F).

N	S	
☐	☐	A fórmula $\varphi \Leftrightarrow \psi$ não é uma tautologia.
☐	☐	As fórmulas φ e ψ são logicamente equivalentes.
☐	☐	ψ ter valor lógico verdadeiro é uma condição suficiente para φ ter valor lógico verdadeiro.
☐	☐	ψ ter valor lógico verdadeiro é uma condição necessária para φ ter valor lógico verdadeiro.

exercício 2. Considere os conjuntos $A = \{2, 3, \{2\}, \{3\}\}$ e $B = \mathbb{N} \cup \{\{2, 3\}, (2, 3)\}$. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
☐	☐	$\{(2, 3)\} \in B$
☐	☐	$\{(2, 3)\} \subseteq B \setminus A$
☐	☐	$\{2, 3\} \subseteq A$ e $\{2, 3\} \in B$
☐	☐	$A \cap B \in B$

exercício 3. Considere as funções $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $g \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ dadas por

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & \text{se } n \text{ é par } \wedge n \neq 2 \\ n, & \text{se } n \text{ é primo} \\ 3n-1, & \text{se } n \text{ é ímpar e não primo} \end{cases}, \qquad g(n) = 2|n| + 4.$$

Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
☐	☐	$f(\{1, 2, 3, 4\} = \{2, 3, 5\}$.
☐	☐	$g^{\leftarrow}(\{2, 3, 5, 7, 8\}) = \{1, 2\}$.
☐	☐	$f \circ g$ é um função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{N}$ tal que $(f \circ g)(n) = n + 1$.
☐	☐	A função f é injetiva.

exercício 4. Considere a relação R definida em $\mathbb{Z}$ por $x\,R\,y \Leftrightarrow |x-y| \leq 1$. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
☐	☐	A relação R é reflexiva.
☐	☐	A relação R é simétrica.
☐	☐	A relação R é anti-simétrica.
☐	☐	A relação R é transitiva.

exercício 5. Considere os conjuntos $A = \{X \subseteq \mathbb{Z} \,|\, \exists x, y \in \mathbb{Z}, x \neq y \text{ e } X = \{x, y\}\}$, $B = \{-1, 0, 3\}$ e $C = \{x \in \mathbb{Z} : 2|x| + 1 \in B\}$.

(a) (1.5 valores) Determine $(B \setminus C) \times C$.

(b) (0,75 valores) Determine $\mathcal{P}(B) \setminus A$.

exercício 6. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e R_n a relação de equivalência em $A = \{x \in \mathbb{Z} : -4 \leq x \leq 4\}$ definida por

$$x\,R_n\,y \Leftrightarrow n \text{ divide } x - y.$$

(a) Considere $n = 3$.

(i) (1 valor) Determine as classes de equivalência $[0]_{R_3}$ e $[1]_{R_3}$.

(ii) (0,75 valores) Determine o conjunto quociente A/R_3.

(b) (0,75 valores) Indique um valor de n tal que R_n seja a relação universal em A.

exercício 7. Considere o conjunto

$$P = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}\}$$

e o seu subconjunto $S = \{\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\}$.

(a) (1 valor) Desenhe o diagrama de Hasse do c.p.o. $(P, \subseteq)$ onde $\subseteq$ é a relação de inclusão.

(b) (1 valor) Determine, caso existam, os majorantes, os minorantes, o supremo e o ínfimo de S.

exercício 8. Diga, justificando, se cada uma das afirmações que se seguem é ou não verdadeira.

(a) (1.25 valores) Se R e S são relações binárias antissimétricas num conjunto A, então $R \cup S$ é antissimétrica.

(b) (1.25 valores) Se A, B e C são conjuntos tais que $A \cap B = A \cap (B \setminus C)$, então $A \cap B \subseteq A \setminus C$.

(c) (1.25 valores) Sejam A, B e C conjuntos. Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções tais que g e $g \circ f$ são sobrejetivas, então f é sobrejetiva.

exercício 9. (1,5 valores) Prove que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$3 \times 2^0 + 3 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + \ldots + 3 \times 2^n = 3 \times (2^{n+1} - 1).$$