Universidade do Minho LCC

Tópicos de Matemática
Exame de Recurso
07/02/2011

(duração: 2 horas)

Justifique convenientemente todas as respostas.

1. Considere a fórmula proposicional $\varphi : (p_1 \Rightarrow p_2) \Leftrightarrow (\neg p_0)$. Diga se são verdadeiras as seguintes afirmações:
   (a) A fórmula φ não é uma tautologia nem uma contradição.
   (b) É necessário que $p_0 \Rightarrow p_1$ tenha valor lógico verdadeiro para que φ tenha valor lógico verdadeiro.

2. Sejam
   $$A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 9\}, \quad B = \{a, b, c, ..., z\}, \quad C = \{x \in \mathbb{N} : 2x^2 \in A \vee 3x \in A\}, \quad D = \{2, 5, \{3\}\}.$$
   (a) Determine $\mathcal{P}(C) \setminus \mathcal{P}(D)$.
   (b) Determine $\bigcap_{n \in A} X_n$ e $\bigcup_{n \in A} X_n$, onde, para cada $n \in A$, $X_n = \{x \in \mathbb{Z} : |x| \leq n + 1\}$.
   (c) Numa determinada linguagem de programação, os nomes das variáveis são formados por 3 caracteres. O primeiro caracter do nome da variável deve ser uma letra de 'a' a 'z', os outros dois caracteres podem ser letras de 'a' a 'z' ou dígitos de 1 a 9. Sendo V o conjunto dos nomes das variáveis, use os conjuntos anteriores e o produto cartesiano para completar a seguinte definição: $V = \{pqr : (p, q, r) \in ...\}$.

3. Sejam A, B, C conjuntos. Mostre que se $A \in \mathcal{P}(C)$, então $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.

4. Prove que, para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $3^n > 2^{n+1}$.

5. Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a função definida por
   $$f(n) = \begin{cases} |n| & \text{se } -4 \leq n < 3 \\ n + 1 & \text{se } n < -4 \text{ ou } n \geq 3 \end{cases}$$
   (a) Determine
      (i) $f(\{-6, -5, -4, 2, 3\})$;
      (ii) $f(\mathbb{N})$;
      (iii) $f^{\leftarrow}(\{-4, -3, 3\})$;
      (iv) $f^{\leftarrow}(\mathbb{N})$.
   (b) Diga se f é injetiva.
   (c) Indique se f é sobrejetiva.

6. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $\rho = \{(a, b) \in A \times A : a - b = 1\}$ e S a relação binária definida em A por
   $$(x, y) \in S \text{ se e só se } x + y \text{ é par.}$$
   (a) Mostre que S é uma relação de equivalência.
   (b) Determine o conjunto quociente A/S.
   (c) Verifique que ρ não é uma relação de equivalência em A e indique a menor relação de equivalência R em A que contém ρ.

(v.s.f.f.)

7. Considere os conjuntos

$$P = \{\{1\}, \{4\}, \{1,2\}, \{2,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\} \text{ e}$$
$$Q = \{\{1\}, \{1,2\}, \{2,4\}, \{1,2,4\}\}.$$

(a) Desenhe o diagrama de Hasse do c.p.o. $(P, \subseteq)$ onde $\subseteq$ é a relação de inclusão.

(b) Determine os elementos maximais e minimais de P.

(c) Determine, caso existam, os majorantes e os minorantes de Q.

(d) Dê exemplo de um subconjunto de P com 3 elementos que admita máximo e mínimo e indique-os.

Cotação:

1. (2,5 valores) **2.** (3,5 valores) **3.** (1,75 valores) **4.** (2,0 valores)
5. (3,5 valores) **6.** (3,75 valores) **7.** (3,0 valores)