cardinalidade

Conjuntos equipotentes

Sejam A e B conjuntos. Diz-se que A é **equipotente** a B, e escreve-se $A \sim B$, se existe uma aplicação bijetiva $f : A \to B$.

Exemplos.

1. $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\} \sim \{1, 2, 3, ..., n\}$;
2. Se $a \neq b$ e $x \neq y$, então, $\{a, b\} \sim \{x, y\}$;
3. O único conjunto equipotente a $\emptyset$ é o próprio $\emptyset$;
4. $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N} = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$.

5. $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\sim \mathbb{R}$ pois

$$\begin{array}{rcl} f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \operatorname{tg} x \end{array}$$

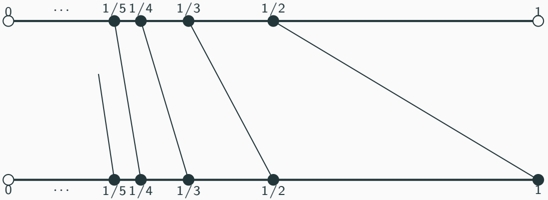
é bijetiva.

6. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ com $a < b$ e $c < d$. Então, $]a, b[\sim]c, d[$ porque

$$\begin{array}{rcl} f :]a, b[& \to &]c, d[\\ x & \mapsto & \frac{d-c}{b-a}x + \frac{cb-da}{b-a} \end{array}$$

é bijetiva.

7. $]0,1] \sim]0,1[$



$$\begin{aligned} f :]0,1] &\to]0,1[\\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{se } x = \frac{1}{n} (n \in \mathbb{N}) \\ x & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Definição. Um conjunto diz-se *infinito* se é equipotente a pelo menos um dos seus subconjuntos próprios, i.e., se

$$\exists X \in \mathcal{P}(A): \; X \neq A \text{ e } A \sim X.$$

Um conjunto diz-se *finito* se não for infinito.

Exemplos.

1. $\mathbb{N}$ é infinito: $2\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$;

2. Dado $n \in \mathbb{N}$, $\{1, 2, 3, ..., n\}$ é finito;

3. $\emptyset$ é finito;

4. $\mathbb{R}$ é infinito: $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\subsetneq \mathbb{R}$ e $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\sim \mathbb{R}$.

Propriedades.

1. Se A é infinito e $A \sim B$, então, B é infinito;

2. Se A é finito e $A \sim B$, então, B é finito;

3. Se $A \sim B$ então ou A e B são ambos finitos ou A e B são ambos infinitos.

4. Se A é finito e $n \in \mathbb{N}$, então,

$$A \sim \{1, 2, 3, ..., n\} \Longleftrightarrow A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, \text{ onde } a_i \neq a_j \text{ sempre que } i \neq j.$$

Cardinal de um conjunto

Sejam A, B e C conjuntos. Então:

1. A é equipotente a si mesmmo;
2. Se A é equipotente a B então B é equipotente a A;
3. Se A é equipotente a B e B é equipotente a C, então, A é equipotentes a C.

Definição. Se $A \sim B$, diz-se que A e B têm o mesmo **cardinal**, e escreve-se $\#A = \#B$.

Se não existe uma aplicação bijetiva entre A e B, mas sim uma aplicação injetiva de A em B, escreve-se $A \prec B$ e diz-se que B tem uma cardinalidade superior à de A.

Mostra-se que, dados dois conjuntos quaisquer A e B, apenas uma das 3 situações seguintes se verifica:

$$A \prec B \qquad \text{ou} \qquad B \prec A \qquad \text{ou} \qquad A \sim B.$$

Teorema de Cantor-Bernstein-Schröeder. Sejam A e B conjuntos. Se existe $f : A \to B$ injetiva e existe $g : B \to A$ injetiva, então existe $h : A \to B$ bijetiva (i.e., $A \sim B$).

Exemplo. $]0,1] \sim]0,1[$ porque $f :]0,1] \to]0,1[$, definida por $f(x) = \frac{x}{2}$, e $g :]0,1[\to]0,1]$, definida por $g(x) = x$, são aplicações injetivas.

Teorema de Cantor. Seja A um conjunto. Então, $A \prec \mathcal{P}(A)$.

Demonstração. A aplicação $A \to \mathcal{P}(A)$ definida por $x \mapsto \{x\}$, com $x \in A$, é claramente injetiva e não bijetiva.

Suponhamos, por redução ao absurdo que existe uma função $f : A \to \mathcal{P}(A)$ bijetiva. Seja $C = \{a \in A : a \notin f(a)\} \in \mathcal{P}(A)$. Então, porque f é sobrejetiva, existe $c \in A$ tal que $f(c) = C$. Então,

$$c \in C \Leftrightarrow c \notin f(c) \Leftrightarrow c \notin C,$$

o que é um absurdo.

Conjuntos numeráveis e conjuntos não numeráveis

Definição. Um conjunto A diz-se **numerável** se A é equipotente a $\mathbb{N}$.

Propriedades

- Se A e B são numeráveis então $A \cup B$ é numerável.
- Se I é numerável e, para cada $i \in I$, A_i é numerável, então, $\bigcup_{i \in I} A_i$ é numerável.
- Se A e B são numeráveis então $A \times B$ é numerável.
- Se A_1, A_2, ..., A_n é numerável, então, $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots A_n$ é numerável.

Exemplos.

1. $\mathbb{N}$ é numerável - basta considerar a função identidade;

2. $2\mathbb{N}$ é numerável - basta considerar a função

$$f: \begin{array}{c} \mathbb{N} \to 2\mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \end{array};$$

3. $\mathbb{N}_0$ é numerável - basta considerar a função

$$f: \begin{array}{c} \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0 \\ n \mapsto n-1 \end{array};$$

4. $\mathbb{Z}$ é numerável - basta considerar a função

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \\ 1 \mapsto 0 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto -1 \\ 4 \mapsto 2 \\ 5 \mapsto -2 \\ \vdots \end{array};$$

ou seja,

$$f(n) = \begin{cases} -\frac{n-1}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

5. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é numerável

$$\begin{array}{cccccccc}
(1,1) & \rightarrow & (1,2) & & (1,3) & \rightarrow & (1,4) & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
(2,1) & & (2,2) & & (2,3) & & (2,4) & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
(3,1) & & (3,2) & & (3,3) & & (3,4) & \cdots \\
 & \swarrow & & & & & & \\
(4,1) & & (4,2) & & (4,3) & & (4,4) & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
f: \quad & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\
& (n, m) \mapsto \tfrac{1}{2}(n+m-2)(n+m-1)
\end{aligned}$$

6. $\mathbb{Q}$ é numerável.

Definição. Um número real α diz-se **algébrico** se existe um polinómio de coeficientes racionais do qual α é raíz. Caso contrário, α diz-se **transcendente**.

Exemplos:

- Todos os racionais são reais algébricos;
- $\sqrt{2}$ é algébrico; $\qquad x^2 - 2$
- $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é algébrico; $\qquad x^4 - 10x^2 + 1$
- O número de Champernowne, $0,1234567891011121314...$, é transcendente
- Os números e e π são transcendentes;
- Não se sabe se $e + \pi$ é transcendente ou algébrico.

Exemplos.

7. O conjunto dos números algébricos é numerável.
   Um número algébrico é raiz de um polinómio (de grau n) com $n+1$ coeficientes racionais. Como $\mathbb{Q}$ é numerável, o produto cartesiano de $n+1$ conjuntos $\mathbb{Q}$ é numerável.

8. O intervalo real $]0,1[$ não é numerável
   Se o intervalo fosse numerável, podíamos listar todos os seus elementos na forma:
   $0, a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$
   $0, a_{21}a_{22}a_{23}\cdots$
   $\vdots$
   Mas, o número $0, b_1b_2b_3b_4\cdots$, onde $b_i \neq a_{ii}$, para todo $i \in \mathbb{N}$ não aparece na lista.

9. $\mathbb{R}$ não é numerável.

10. O conjunto dos números transcendentes não é numerável.

Temos que

$$\mathbb{Q} \sim \{\text{números algébricos}\} \prec \{\text{números transcendentes}\} \sim \mathbb{R}.$$

1. Se A é finito, identifica-se $\#A$ com o número de elementos de A.
2. $\#\mathbb{N} = \aleph_0$ (lê-se "alef zero");
3. $\#\mathbb{R} = c$ (lê-se "contínuo").