relações de equivalência

Definições básicas

Seja A um conjunto. Representa-se por $\mathcal{R}(A)$ o conjunto das relações binárias em A, ou seja

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{P}(A \times A).$$

Dadas $R, S \in \mathcal{R}(A)$, temos que

$$R^{-1}, R \cap S, R \cup S, S \circ R, S \backslash R \in \mathcal{R}(A).$$

Mais ainda,

$$\emptyset, \mathrm{id}_A, \omega_A \in \mathcal{R}(A).$$

Propriedades. Entre todas as relações binárias num conjunto A, destacam-se as que satisfazem algumas das seguintes propriedades.

Sejam A um conjunto e $R \in \mathcal{R}(A)$. Diz-se que:

1. R é **reflexiva** em A se
$$\forall a \in A,\ a\ R\ a \qquad (i.e.,\ \mathrm{id}_A \subseteq R);$$
2. R é **simétrica** em A se
$$\forall a, b \in A,\ a\ R\ b \Rightarrow b\ R\ a \qquad (i.e.,\ R^{-1} = R);$$
3. R é **transitiva** em A se
$$\forall a, b, c \in A,\ a\ R\ b\ \wedge\ b\ R\ c \Rightarrow a\ R\ c \qquad (i.e.,\ R \circ R \subseteq R);$$
4. R é **antissimétrica** em A se
$$\forall a, b \in A,\ a\ R\ b\ \wedge\ b\ R\ a \Rightarrow b = a \qquad (i.e.,\ R^{-1} \cap R \subseteq \mathrm{id}_A);$$

Exemplos. Seja A um conjunto qualquer. Então,

1. A relação id_A é reflexiva, simétrica, transitiva e antissimétrica em A.
2. A relação ω_A é reflexiva, simétrica e transitiva em A.
   A relação ω_A é antissimétrica em A se e só se A tem no máximo um elemento.
3. A relação $\emptyset$ é simétrica, transitiva e antissimétrica em A.
   A relação $\emptyset$ é reflexiva em A se e só se $A = \emptyset$.

Exemplos. Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Os exemplos seguintes mostram que as 4 propriedades são independentes.

1. $R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,3), (2,1)\}$
   R_1 é reflexiva;
   R_1 é não simétrica $((2,3) \in R_1$ e $(3,2) \notin R_1)$;
   R_1 é não transitiva $((1,2), (2,3) \in R_1$ e $(1,3) \notin R_1)$;
   R_1 é não antissimétrica $((2,1), (1,2) \in R_1$ e $2 \neq 1)$;

2. $R_2 = \{(1,2), (2,1), (3,3), (4,4)\}$
   R_2 é não reflexiva $(1 \in A$ e $(1,1) \notin R_2)$;
   R_2 é simétrica;
   R_2 é não transitiva $((1,2), (2,1) \in R_2$ e $(1,1) \notin R_2)$;
   R_2 é não antissimétrica $((2,1), (1,2) \in R_2$ e $2 \neq 1)$;

3. $R_3 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,2),(3,1)\}$
   R_3 é não reflexiva; $(3 \in A \text{ e } (3,3) \notin R_3)$;
   R_3 é não simétrica $((3,2) \in R_3 \text{ e } (2,3) \notin R_3)$;
   R_3 é transitiva
   R_3 é não antissimétrica $((2,1),(1,2) \in R_3 \text{ e } 2 \neq 1)$;

4. $R_4 = \{(1,2),(1,1),(2,3)\}$
   R_4 é não reflexiva $(3 \in A \text{ e } (3,3) \notin R_4)$;
   R_4 é não simétrica $((1,2) \in R_4 \text{ e } (2,1) \notin R_4)$;
   R_4 é não transitiva $((1,2),(2,3) \in R_4 \text{ e } (1,3) \notin R_4)$;
   R_4 é antissimétrica

Relações de equivalência

Definição. Seja A um conjunto. Uma relação binária R em A diz-se uma **relação de equivalência em** A se R é reflexiva, simétrica e transitiva em A.

Exemplos.

1. Seja

$$A = \{x : x \text{ é aluno de Tópicos de Matemática em } 2017/2018\}.$$

   Então, a relação R definida em A por

$$x \; R \; y \Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ têm a mesma idade},$$

   é uma relação de equivalência em A.

2. Seja A um conjunto qualquer. As relações id_A e ω_A são relações de equivalência em A.

3. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,2), (2,1), (3,4), (4,3)\}.$$

Então, R é uma relação de equivalência em A pois é

(a) reflexiva: $\mathrm{id}_A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\} \subseteq R$;

(b) simétrica: $R^{-1} =$
$\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (2,1), (1,2), (4,3), (3,4)\} = R$;

(c) transitiva: $R \circ R =$
$\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (2,1), (1,2), (4,3), (3,4)\} \subseteq R$.

4. Seja $m \in \mathbb{Z}$. Então, a relação R_m definida em $\mathbb{Z}$ por

   $$x \; R_m \; y \Leftrightarrow \text{os restos das divisões inteiras de } x \text{ e } y \text{ por } m \text{ são iguais,}$$

   é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$, designada por **relação de congruência módulo** m.
   É costume escrever-se $x \equiv y (\bmod m)$ em vez de $x \; R_m \; y$.

5. A relação $\equiv (\bmod 3)$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$.

   Os inteiros x e y estão em relação se os restos das divisões de x e y por 3 são iguais.
   Temos então que $x = 3k + r$ e $y = 3k' + r$ para alguns $k, k' \in \mathbb{Z}$, pelo que
   $$y - x = 3(k - k'),$$
   ou seja, $y - x$ é um múltiplo de 3.

6. Sejam A e B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. A relação binária definida em A por

$$x \ R_f \ y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

é uma relação de equivalência em A.

De facto, R_f é:

(a) reflexiva: $\forall x \in A, \ f(x) = f(x)$;

(b) simétrica: $\forall x, y \in A, \ f(x) = f(y) \Rightarrow f(y) = f(x)$;

(c) transitiva:
$\forall x, y, z \in A, \ (f(x) = f(y) \ \wedge \ f(y) = f(z)) \Rightarrow f(x) = f(z)$.

Classes de equivalência

Definição. Seja A um conjunto. Se R é uma relação de equivalência em A e $x \in A$, chama-se **classe de equivalência de** x **na relação** R, e representa-se por $[x]_R$ ou R_x, ao conjunto

$$[x]_R = \{y \in A : x \; R \; y\}.$$

Ao conjunto $\{[x]_R : x \in A\}$ chama-se **conjunto quociente de** A **por** R e representa-se por A/R.

Exemplos.

1. Seja $A \neq \emptyset$. Para $x \in A$, temos que

$$[x]_{\mathrm{id}_A} = \{y \in A : y \; \mathrm{id}_A \; x\} = \{y \in A : y = x\} = \{x\}$$

e, portanto,

$$A/\mathrm{id}_A = \{\{x\} : x \in A\}.$$

2. Seja $A \neq \emptyset$. Para $x \in A$, temos que

$$[x]_{\omega_A} = \{y \in A : y\ \omega_A\ x\} = A$$

e, portanto,

$$A/\omega_A = \{A\}.$$

3. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e
$R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 4)\}$. Então,

$$[1]_R = \{1, 2\} = [2]_R, \qquad [3]_R = \{3\}, \qquad [4]_R = \{4\}.$$

Assim, temos que $A/R = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$.

4. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}.$$

Então,

$$[1]_R = \{1, 2\} = [2]_R, \qquad [3]_R = \{3, 4\} = [4]_R, \qquad [5]_R = \{5\}.$$

Assim, temos que $A/R = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}\}$.

Teorema. Sejam A um conjunto não vazio e R uma relação de equivalência em A. Então,

1. $\forall x \in A \;\; x \in [x]_R$ (e, portanto, $[x]_R \neq \emptyset$);
2. $\forall x, y \in A, \, (y \in [x]_R \Leftrightarrow [x]_R = [y]_R)$;
3. $\forall x, y \in A, \; ([x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset \Rightarrow [x]_R = [y]_R)$;
4. $\bigcup_{x \in A} [x]_R = A$.

Demonstração.

1. Como R é reflexiva, temos que, para todo $x \in A$, $x \; R \; x$. Logo, por definição de $[x]_R$, temos que $x \in [x]_R$.
2. Suponhamos que $[x]_R = [y]_R$. Queremos provar que $y \in [x]_R$. De (1), temos que $y \in [y]_R$, pelo que $y \in [x]_R$.

Suponhamos que $y \in [x]_R$. Queremos provar que $[x]_R = [y]_R$.
De $y \in [x]_R$ temos que $x \; R \; y$. Como R é simétrica, concluímos que $y \; R \; x$. Então,

$$\begin{aligned} a \in [y]_R &\Leftrightarrow y \; R \; a \\ &\Rightarrow x \; R \; a \qquad [x \; R \; y \text{ e } R \text{ é transitiva}] \\ &\Leftrightarrow a \in [x]_R \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a \in [x]_R &\Leftrightarrow x \; R \; a \\ &\Rightarrow y \; R \; a \qquad [y \; R \; x \text{ e } R \text{ é transitiva}] \\ &\Leftrightarrow a \in [y]_R \end{aligned}$$

Logo, $[x]_R = [y]_R$.

3. Sejam $x, y \in A$ tais que $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$. Então, existe $a \in A$ tal que $x \; R \; a$ e $y \; R \; a$. Como R é simétrica e transitiva, concluímos que $y \; R \; x$ e, por (2), que $[x]_R = [y]_R$.
4. A inclusão $\bigcup_{x \in A} [x]_R \subseteq A$ é óbvia porque $[x]_R \subseteq A$, para todo $x \in A$.

   Provemos a inclusão contrária:

$$x \in A \Rightarrow x \in [x]_R \Rightarrow x \in \bigcup_{x \in A} [x]_R$$

   e, portanto,

$$A \subseteq \bigcup_{x \in A} [x]_R.$$

   Logo,

$$\bigcup_{x \in A} [x]_R = A.$$

Partições

Definição. Seja A um conjunto não vazio. Chama-se **partição de** A a qualquer conjunto P de conjuntos tais que:

1. $\forall X \in P,\ \emptyset \neq X \subseteq A$;
2. $\forall X, Y \in P,\ X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset$;
3. $\displaystyle\bigcup_{X \in P} X = A$.

Observação. Das 3 condições, podemos concluir que

$$\forall x \in A,\ \exists^1 X \in P:\ x \in X.$$

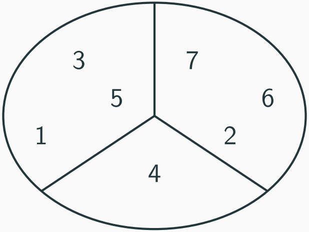
Exemplo 1. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e

$$P = \{\{1, 3, 5\}, \{4\}, \{2, 6, 7\}\}.$$

Então, P é uma partição de A pois

(a) Os 3 elementos de P são subconjuntos não vazios de A;
(b) Os 3 elementos de P são disjuntos 2 a 2;
(c) $\{1, 3, 5\} \cup \{4\} \cup \{2, 6, 7\} = A$.

A partição P de A pode ser representada pelo diagrama de Venn



Exemplo 2. Sejam $A = \mathbb{Z}$ e $P = \{X_0, X_1, X_2\}$, onde

$$X_0 = \{3n : n \in \mathbb{Z}\},$$

$$X_1 = \{3n + 1 : n \in \mathbb{Z}\}$$

e

$$X_2 = \{3n + 2 : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Então, P é uma partição de A.

Exemplo 3. Sejam $A = \mathbb{R}$ e

$$P = \{]-\infty, -3],]-3, 2[, [2, 6],]6, +\infty[\}.$$

Então, P é uma partição de A.

Partições e relações de equivalência

As propriedades que as classes de equivalência definidas por uma relação de equivalência satisfazem provam o seguinte resultado:

Teorema. Sejam A um conjunto não vazio e R uma relação de equivalência em A. Então, A/R é uma partição de A.

Exemplo. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),$$
$$(1,2),(2,1),(4,5),(5,4),(4,6),(6,4),(5,6),(6,5)\}$$

. Então, R é uma relação de equivalência em A e

$$A/R = \{\{1,2\},\{3\},\{4,5,6\}\}$$

é uma partição de A.

O recíproco do teorema anterior também é válido, i.e., cada partição também define uma relação de equivalência.

Teorema. Sejam A um conjunto não vazio e P uma partição de A. Seja R_P a relação binária definida em A por

$$x \; R_P \; y \Longleftrightarrow \exists X \in P : \; \{x, y\} \subseteq X.$$

Então, R_P é uma relação de equivalência.

Demonstração. Temos de provar que R_P é

1. Reflexiva;
2. Simétrica;
3. Transitiva.

1. Seja $x \in A$. Então, como $\bigcup_{X \in P} X = A$, temos que existe $X \in P$ tal que $x \in X$. Assim, $\{x\} \subseteq X$ e, portanto, $x \ R_P \ x$. Logo, R_P é reflexiva.

2. Sejam $x, y \in A$ tais que $x \ R_P \ y$. Então, existe $X \in P$ tal que $\{x, y\} \subseteq X$. Assim, $\{y, x\} \subseteq X$ e, portanto, $y \ R_P \ x$. Logo, R_P é simétrica.

3. Sejam $x, y, z \in A$ tais que $x \ R_P \ y$ e $y \ R_P \ z$. Então, existem $X_1, X_2 \in P$ tais que $\{x, y\} \subseteq X_1$ e $\{y, z\} \subseteq X_2$. Assim, $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ e, portanto, como P é uma partição de A, $X_1 = X_2$. Então, $\{x, z\} \subseteq X_1$ e, portanto, $x \ R_P \ z$. Logo, R_P é transitiva. $\square$

Observação. Sendo $P = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$, então,

$$R_P = \omega_{X_1} \cup \omega_{X_2} \cup \cdots \cup \omega_{X_n}.$$

Exemplo 1. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $P = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 6\}, \{5\}\}$ uma partição de A. Então,

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2),$$
$$(4,4), (6,6), (4,6), (6,4), (5,5)\}$$

.

Exemplo 2. Sejam $A = \mathbb{Z}$ e $P = \{X_0, X_1, X_2\}$, onde

$X_0 = \{3n : n \in \mathbb{Z}\}, \qquad X_1 = \{3n+1 : n \in \mathbb{Z}\}, \qquad X_2 = \{3n+2 : n \in \mathbb{Z}\}.$

Então

$$x \; R_P \; y \iff x \equiv y \pmod 3.$$

Conclusão. Seja A um conjunto não vazio. Então, se $\mathcal{E}(A)$ representar o conjunto das relações de equivalência em A, temos que

$$R \in \mathcal{E}(A) \Rightarrow A/R \text{ partição} \Rightarrow R_{A/R} \in \mathcal{E}(A).$$

$$R = R_{A/R}$$

$$P \text{ partição} \Rightarrow R_P \in \mathcal{E}(A) \Rightarrow A/R_P \text{ partição}.$$

$$P = A/R_P$$