Cardinalidade de conjuntos

Dizemos que dois conjuntos A e B
são **equipotentes** e escrevemos $A \sim B$,
ou que têm o mesmo **cardinal** e escrevemos $|A| = |B|$ (ou $\#A = \#B$),
se existir uma bijeção $f : A \to B$.

Ex.:

- $\{\pi, 0, -1\} \sim \{1, 2, 3\}$ porque, por exemplo,
  $$\begin{array}{rcl} f : \{\pi, 0, -1\} & \to & \{1, 2, 3\} \\ \pi & \mapsto & 1 \\ 0 & \mapsto & 3 \\ -1 & \mapsto & 2 \end{array}$$ é uma função bijetiva.
- $\{\pi, 2\pi\} \not\sim \{1, 2, 3\}$ porque não existe nenhuma função sobrejetiva $\{\pi, 2\pi\} \to \{1, 2, 3\}$

Outros exemplos

- Consideremos o conjunto $S = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\} \subsetneq \mathbb{N}$.
  $\mathbb{N} \sim S$, pois $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{N} & \to & S \\ n & \mapsto & n^2 \end{array}$ é uma função bijetiva.
  (Galileu, 1638)
- $\mathbb{N}_0 \sim \mathbb{N}$, pois $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$ é uma função bijetiva.
- $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$, pois $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \end{array}$
  é uma função bijetiva.

Sejam A, B e C conjuntos.

1. $A \sim A$.
2. Se $A \sim B$, então $B \sim A$.
3. Se $A \sim B$ e $B \sim C$, então $A \sim C$.

(Como já vimos que $\mathbb{N}_0 \sim \mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$, podemos afirmar que $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}_0$.)

Seja A um conjunto.

- A diz-se **finito** se $A = \emptyset$ ou $A \sim \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq n\}$, para algum $n \in \mathbb{N}$.
- A diz-se **infinito** se não é finito.
- A diz-se **infinito numerável** se $A \sim \mathbb{N}$.
- A diz-se **numerável** se A é finito ou infinito numerável.

Sejam n, m números naturais; se $n \neq m$, então $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq n\} \nsim \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq m\}$

Dado um conjunto A, o que será o cardinal de A (que se representa por $|A|$ ou $\#A$)?

- $|\emptyset| = 0$
- Se A for um conjunto finito não vazio, $|A|$ é o único $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \sim \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq n\}$
- $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ (lê-se “álefe-zero”)
- ...?

$\{\pi, 0, -1\}$ é finito e $|\{\pi, 0, -1\}| = 3$.

$\mathbb{Z}$ é infinito numerável, logo $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$

$\mathbb{Q}$ é também infinito numerável:

Ordene-se todas as frações positivas como indicado abaixo,

$$
\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \rightarrow & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots
\end{array}
$$

cancelando as frações que representem números repetidos (por exemplo, $\frac{2}{2} = \frac{1}{1}$, ou $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$); teremos uma sucessão $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ($q_1 = 1$; $q_2 = 2$; $q_3 = \frac{1}{2}$; $q_4 = \frac{1}{3}$; $q_5 = 3$;...) que percorrerá todo o conjunto $\mathbb{Q}^+$ sem repetição.

A função

$$
\begin{array}{rccl}
f: \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Q} & \\
n & \mapsto & \begin{cases} q_n & \text{se } n > 0 \\ 0 & \text{se } n = 0 \\ -q_{-n} & \text{se } n < 0 \end{cases} &
\end{array}
$$

será bijetiva.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são conjuntos infinitos numeráveis.

Haverá conjuntos infinitos não numeráveis?

Sim. $\mathbb{R}$ é infinito não numerável (Georg Cantor, 1874, 1891):

Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma função; para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a expansão decimal de $f(n)$ (sem sequências finais de 9s):

$f(n) = a_0^n, a_1^n a_2^n a_3^n a_4^n \dots$

($a_0^n \in \mathbb{Z}$ e, para cada i, $a_i^n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
além disso, por exemplo, usamos 1,0000 ... e não 0,9999 ...)

Para cada i, seja $b_i = \begin{cases} 1 & \text{se } a_i^i = 0 \\ 0 & \text{se } a_i^i \neq 0 \end{cases}$;

consideremos o número $b = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 \dots$

Temos

$$f(1) = a_0^1, a_1^1 a_2^1 a_3^1 a_4^1 \ldots$$
$$f(2) = a_0^2, a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2 \ldots$$
$$f(3) = a_0^3, a_1^3 a_2^3 a_3^3 a_4^3 \ldots$$
$$f(4) = a_0^4, a_1^4 a_2^4 a_3^4 a_4^4 \ldots$$
$$\vdots$$

$$b = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots$$

$$b \neq f(1);\ b \neq f(2);\ b \neq f(3);\ b \neq f(4);\ \ldots$$

Logo $b \notin \mathrm{CDom}(f)$ e portanto f não é sobrejetiva.

(Esta é a demonstração **diagonal** de Cantor.)

Além disto, prova-se que $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Se existir uma função injetiva $f : A \to B$, escreve-se $|A| \leq |B|$.

Se $|A| \leq |B|$ e $A \nsim B$ (isto é, $|A| \neq |B|$), escreve-se $|A| < |B|$.

Sejam A e B conjuntos.

- $A \nsim \mathcal{P}(A)$
- $|A| < |\mathcal{P}(A)|$
- Se A é finito, $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$
- Se A e B são finitos, $|A \times B| = |A| \times |B|$
- Se A é infinito, $A \sim A \times A$

Sejam A, B e C conjuntos.

- $|A| \leq |A|$
- Se $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |A|$, então $|A| = |B|$ (Teorema de Schröder-Bernstein)
- Se $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |C|$, então $|A| \leq |C|$