funções

Definição. Sejam A e B conjuntos e R uma relação binária de A em B. Diz-se que R é um *função* ou *aplicação* de A em B se

1. $D_R = A$;
2. Para cada $a \in A$, se $b_1, b_2 \in B$ são tais que $(a, b_1), (a, b_2) \in R$, então, $b_1 = b_2$.

ou seja, R é uma função de A em B se para cada $a \in A$ existe **um e um só** $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$.

Em geral, representa-se uma função por uma letra minúscula: f, g, etc. Escreve-se $f : A \to B$ para indicar que f é uma função de A em B.

A cada elemento $a \in A$ chama-se *objeto* e, para cada $a \in A$, o único elemento $b \in B$ para o qual $(a, b) \in R$ diz-se *a imagem de a por f* e representa-se por $f(a)$.

O conjunto de todas as funções de A em B representa-se por B^A.

Se f é uma função de A em B, escreve-se

$$\begin{aligned} f : \quad & A \to B \\ & a \mapsto f(a) \end{aligned}$$

.

Exemplos:

1. A relação identidade em A, $\mathrm{id}_A = \{(a, a) : a \in A\}$ é uma função de A em A.

2. A relação universal em A, ω_A, não é uma aplicação de A em A se e só se A tem pelo menos dois elementos.

3. Seja $A = \{1, 2, 3\}$. Então:

   $f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1)\}$ é uma função de A em A;

   $g = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$ não é uma função de A em A;

   $h = \{(2, 1), (3, 1)\}$ não é uma função de A em A;

a aplicação vazia

Definição. Seja A um conjunto. Chama-se *aplicação vazia*, e representa-se por $\emptyset$, à função de $\emptyset$ em A:

$$\emptyset : \emptyset \to A$$

Temos

$$A \neq \emptyset \Rightarrow A^{\emptyset} = \{\emptyset\} \wedge \emptyset^{A} = \emptyset$$

$$\emptyset^{\emptyset} = \{\emptyset\}.$$

igualdade de funções

Definição. Sejam A, B, A' e B' conjuntos e $f : A \to B$ e $g : A' \to B'$ aplicações. Diz-se que f *é igual a* g, e escreve-se $f = g$, se

1. $A = A'$;
2. $B = B'$;
3. $(x, f(x)) = (x, g(x))$ (i.e., $f(x) = g(x)$), para todo $x \in A$.

Exemplo. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Então,

$$f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\} \subseteq A \times B$$

e

$$\begin{aligned} g : \quad & A \to B \\ & x \mapsto 2x \end{aligned}$$

são duas aplicações iguais.

propriedades das funções

Sejam A e B conjuntos e $f : A \to B$ uma aplicação. Diz-se que f é

1. **injetiva** se
$$\forall x, y \in A, \qquad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$
2. **sobrejetiva** se
$$\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b.$$
3. **bijetiva** se é simultaneamente injetiva e sobrejetiva.

Exemplos.

1. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ e $f : A \to B$ a aplicação definida por $f = \{(1, 3), (2, 5), (3, 6)\}$. Então, a aplicação f é injetiva pois não existem dois objetos distintos com imagem igual. A aplicação f não é sobrejetiva pois $4 \in B$ não é imagem por f de nenhum elemento de A.

2. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ e $g : A \to B$ a aplicação definida por $g = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 3)\}$. Então, a aplicação f não é injetiva pois $1, 4 \in A$ são tais que $1 \neq 4$ e $g(1) = 3 = g(4)$. A aplicação f é sobrejetiva pois qualquer elemento de B é imagem por g de algum elemento de A.

3. Seja $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a aplicação definida por $h(x) = 2x + 1$, para todo $x \in \mathbb{Z}$. A aplicação h é injetiva pois, dados $x, y \in \mathbb{Z}$, temos que

$$h(x) = h(y) \Rightarrow 2x + 1 = 2y + 1 \Rightarrow x = y.$$

A aplicação h não é sobrejetiva pois, por exemplo, $4 \in \mathbb{Z}$ e não existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $4 = 2a + 1$.

4. Sejam A e B conjuntos tais que $A \neq \emptyset$ e $A \subseteq B$. A aplicação

$$\begin{aligned} i_{A,B} : \quad & A \to B \\ & x \mapsto x \end{aligned}$$

é injetiva e designa-se por **função inclusão ou mergulho de A em B**. Em particular, $i_{A,A} = \mathrm{id}_A$.

Definição. Sejam $f : A \to B$ uma aplicação e $X \subseteq A$. Chama-se *restrição de* f *a* X à aplicação $f|_X : X \to B$ definida por

$$f|_X(a) = f(a), \qquad \forall a \in X.$$

Exemplo. Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ uma aplicação definida por $f(x) = 2x$, para todo $x \in \mathbb{Z}$. Então,

$$\begin{aligned} f|_{2\mathbb{Z}} : \quad 2\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ 2x &\mapsto 4x \end{aligned}$$

função composta

Teorema. Sejam A, B e C conjuntos, $f : A \to B$ e $g : B \to C$. Então, a relação binária $g \circ f$ é uma função de A em C

Demonstração. Começamos por observar que

$$g \circ f = \{(x, y) \in A \times C : (\exists z \in B)(x, z) \in f \text{ e } (z, y) \in g\}.$$

Para provar que $g \circ f$ é função temos de provar que:

1. $\forall a \in A \exists c \in C : \ (a, c) \in g \circ f$;
2. $(a, c_1), (a, c_2) \in g \circ f \Rightarrow c_1 = c_2$.

Provemos então cada uma das afirmações:

1. Seja $a \in A$. Então, existe $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$. Como $b \in B$ e g é aplicação, existe $c \in C$ tal que $(b, c) \in g$. Logo, por definição da relação binária $g \circ f$, podemos concluir que $(a, c) \in g \circ f$.

2. Suponhamos que $(a, c_1), (a, c_2) \in g \circ f$.
   De $(a, c_1) \in g \circ f$ podemos concluir que

$$\exists b_1 \in B : (a, b_1) \in f \text{ e } (b_1, c_1) \in g$$

   e de $(a, c_2) \in g \circ f$ podemos concluir que

$$\exists b_2 \in B : (a, b_2) \in f \text{ e } (b_2, c_2) \in g.$$

   De $(a, b_1), (a, b_2) \in f$, como f é uma função, concluímos que $b_1 = b_2$. Assim, temos que $(b_1, c_1), (b_1, c_2) \in g$ e, como g é aplicação, concluímos que $c_1 = c_2$.

Definição. Dadas as aplicações $f : A \to B$ e $g : B \to C$, chamamos *aplicação (ou função) composta de f com g* à aplicação $g \circ f$ e escrevemos

$$g \circ f : \begin{array}{l} A \to C \\ x \mapsto g(f(x)) \end{array}.$$

Propriedades. Sejam A, B, C e D conjuntos e $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to D$. Então,

1. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;
2. $f \circ \mathrm{id}_A = f = \mathrm{id}_B \circ f$;
3. Se f e g são injetivas, então, $g \circ f$ é injetiva;
4. Se f e g são sobrejetivas, então, $g \circ f$ é sobrejetiva;
5. Se f e g são bijetivas, então, $g \circ f$ é bijetiva;

Demonstração.

1. Resulta do facto da composição de relações binárias ser associativa;

2. Sejam $x \in A$ and $y \in B$. Então,

$$\begin{aligned}(x, y) \in f \circ \mathrm{id}_A &\Leftrightarrow \exists z \in A : (x, z) \in \mathrm{id}_A \wedge (z, y) \in f \\ &\Leftrightarrow \exists z \in A : x = z \wedge (z, y) \in f \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in f\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(x, y) \in \mathrm{id}_B \circ f &\Leftrightarrow \exists w \in B : (x, w) \in f \wedge (w, y) \in \mathrm{id}_B \\ &\Leftrightarrow \exists w \in B : (x, w) \in f \wedge w = y \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in f.\end{aligned}$$

3. Sejam $x_1, x_2 \in A$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Então, $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Como g é injetiva, temos que $f(x_1) = f(x_2)$. Como f é injetiva, concluímos que $x_1 = x_2$. Logo, $g \circ f$ é uma aplicação injetiva.

4. Seja $y \in C$. Porque g é sobrejetiva, existe $z \in B$ tal que $g(z) = y$. Mas, se $z \in B$, como f é sobrejetiva, existe $x \in A$ tal que $f(x) = z$. Temos então que $g(f(x)) = y$, ou seja, dado, $y \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$. Logo, $g \circ f$ é sobrejetiva.

5. Consequência imediata de 3 e 4.

Dados conjuntos A e B, a relação binária inversa de uma aplicação de A em B pode não ser uma aplicação de B em A.

Exemplo. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4\}$ e $F = \{(1, 2), (2, 2), (3, 4)\}$ uma relação binária de A em B.

A relação binária F é uma aplicação e a relação binária $F^{-1} = \{(2, 1), (2, 2), (4, 3)\}$ não é uma aplicação. Porquê?

Levanta-se então a seguinte questão:

Em que condições é que F^{-1} é uma aplicação?

Teorema. Sejam A e B conjuntos e $f : A \to B$ uma aplicação. A relação binária f^{-1} é aplicação de B em A se e só se f é bijetiva. Neste caso, f^{-1} é também bijetiva.

Definição. Seja $f : A \to B$ uma aplicação bijetiva. Chama-se *aplicação (ou função) inversa de f*, e representa-se por $f^{-1} : B \to A$ à aplicação definida por

$$f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow b = f(a), \qquad \text{para } a \in A \text{ e } b \in B.$$

Teorema. A aplicação $f : A \to B$ é bijetiva se e só se existe uma aplicação $g : B \to A$ tal que

$$g \circ f = \mathrm{id}_A \qquad \text{e} \qquad f \circ g = \mathrm{id}_B\,.$$

Mais ainda, a aplicação g é única nestas condições.

Demonstração. Basta ver que $g = f^{-1}$.

Teorema. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções bijetivas. Então,

1. $(f^{-1})^{-1} = f$;
2. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Demonstração.

1. Segue de imediato do facto de $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$ e do teorema anterior.

2. Basta observar que

$$\begin{aligned}
(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\
&= g \circ \mathrm{id}_B \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_C \\
\text{e} & \\
(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \\
&= f^{-1} \circ \mathrm{id}_B \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A
\end{aligned}$$

   e aplicar os teoremas anteriores.

Imagem de um conjunto por uma função.

Definição. Sejam $f : A \to B$ uma função e $X \subseteq A$.

Ao conjunto

$$\begin{aligned} f^{\to}(X) &= \{b \in B : \ \exists a \in X : b = f(a)\} \\ &= \{f(a) \in B : a \in X\} \end{aligned}$$

chamamos *imagem de X por f*.

Observação. Esta definição corresponde à definição de imagem de X pela relação binária f, pelo que também escrevemos $f(X)$.

Exemplos:

1. Sejam $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a aplicação definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{se } x \geq 0 \\ 3-x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e $X = \{-4, 0, 1, 2\}$. Então,

$$f^{\to}(X) = \{f(-4), f(0), f(1), f(2)\} = \{3, 5, 7\}.$$

2. Sejam A e B conjuntos e $f : A \to B$ uma aplicação. Então, $f^{\to}(\emptyset) = \emptyset$ e $f^{\to}(A) = D'_f$.

3. Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ uma aplicação definida por $f(x) = 2x$, para todo $x \in \mathbb{Z}$. Então, $f^{\to}(2\mathbb{Z}) = 4\mathbb{Z}$ e
$f^{\to}(\{2n+1 : n \in \mathbb{Z}\}) = \{4n+2 : n \in \mathbb{Z}\}$.

Imagem inversa de um conjunto por uma função.

Definição. Sejam $f : A \to B$ uma função e $Y \subseteq B$.

Ao conjunto

$$\begin{aligned} f^{\leftarrow}(Y) &= \{a \in A : \ \exists b \in Y : b = f(a)\} \\ &= \{a \in A : f(a) \in Y\} \end{aligned}$$

chamamos *imagem inversa de* Y *por* f.

Observação. A imagem completa inversa de Y por f é exactamente a imagem de Y pela relação binária f^{-1} (que não é necessariamente uma função), pelo que também escrevemos $f^{-1}(Y)$.

Exemplos:

1. Sejam $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a aplicação definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{se } x \geq 0 \\ 3-x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

   e $Y = \{-5, 0, 5\}$. Então, $f^{\leftarrow}(Y) = \{-2, 1\}$ pois $f(-2) = 5$, $f(1) = 5$ e não existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = -5$ ou $f(x) = 0$.

2. Sejam A e B conjuntos e $f : A \to B$ uma aplicação. Então, $f^{\leftarrow}(\emptyset) = \emptyset$ e $f^{\leftarrow}(B) = D_f = A$.

3. Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ uma aplicação definida por $f(x) = 2x$, para todo $x \in \mathbb{Z}$. Então, $f^{\leftarrow}(2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ e $f^{\leftarrow}(\{2n+1 : n \in \mathbb{Z}\}) = \emptyset$.

Teorema. Sejam A e B conjuntos, f uma função de A em B, $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$. Então,

1. $X \subseteq f^{\leftarrow}(f(X))$;
2. $X = f^{\leftarrow}(f(X))$, se f é injetiva.
3. $f(f^{\leftarrow}(Y)) \subseteq Y$;
4. $f(f^{\leftarrow}(Y)) = Y$, se f é sobrejetiva.

Demonstração.

1. Temos $x \in A$, temos

$$x \in X \Rightarrow f(x) \in f(X) \Leftrightarrow x \in f^{\leftarrow}(f(X)).$$

   Logo, $X \subseteq f^{\leftarrow}(f(X))$.

2. Suponhamos que f é injetiva. Então,

$$\begin{aligned} x \in f^{\leftarrow}(f(X)) &\Leftrightarrow f(x) \in f(X) \\ &\Leftrightarrow (\exists a \in X)\ f(x) = f(a) \\ &\Rightarrow (\exists a \in X)\ x = a \\ &\Leftrightarrow x \in X, \end{aligned}$$

   pelo que $f^{\leftarrow}(f(X)) \subseteq X$. Por 1., obtemos a igualdade.

3. Para $y \in B$, temos

$$\begin{aligned} y \in f(f^{\leftarrow}(Y)) &\Leftrightarrow (\exists x \in f^{\leftarrow}(Y))\ y = f(x) \\ &\Rightarrow (\exists x \in A)\ f(x) \in Y \wedge y = f(x) \\ &\Leftrightarrow y \in Y. \end{aligned}$$

   Logo, $f(f^{\leftarrow}(Y) \subseteq Y$.

4. Suponhamos que f é sobrejetiva. Então,

$$\begin{aligned} y \in Y &\Leftrightarrow y \in B \cap Y \\ &\Leftrightarrow (\exists a \in A)\ f(a) = y \in Y \\ &\Leftrightarrow (\exists a \in A)\ a \in f^{\leftarrow}(Y) \\ &\Rightarrow y = f(a) \in f(f^{\leftarrow}(Y), \end{aligned}$$

   pelo que $Y \subseteq f(f^{\leftarrow}(Y))$. A igualdade resulta do ponto 3.

Teorema. Sejam A e B conjuntos quaisquer e $f : A \to B$. Então,

1. f é injetiva se e só se $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$, para todos $X, Y \subseteq A$;
2. f é sobrejetiva se e só se $B \setminus f(X) \subseteq f(A \setminus X)$, para todo $X \subseteq A$;
3. f é bijetiva se e só se $B \setminus f(X) = f(A \setminus X)$, para todo $X \subseteq A$.

Demonstração.

1. [$\Rightarrow$] Sejam $X, Y \subseteq A$. Então,

$$\begin{aligned} b \in f(X \cap Y) &\Leftrightarrow (\exists a \in X \cap Y) f(a) = b \\ &\Rightarrow (\exists a \in X) f(a) = b \wedge (\exists a \in Y) f(a) = b \\ &\Leftrightarrow b \in f(X) \wedge b \in f(Y) \Leftrightarrow b \in f(X) \cap f(y). \end{aligned}$$

   Assim, $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$. Mais ainda, se f é injetiva, temos que

$$\begin{aligned} b \in f(X) \cap f(Y) &\Leftrightarrow b \in f(X) \wedge b \in f(Y) \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in X)(\exists y \in Y) f(x) = b = f(y) \\ &\Rightarrow (\exists x \in X)(\exists y \in Y) x = y \wedge b = f(x) \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in X \cap Y) b = f(x) \Leftrightarrow b \in f(X \cap Y). \end{aligned}$$

   e, por isso, $f(X) \cap f(Y) \subseteq f(X \cap Y)$.

[$\Leftarrow$] Suponhamos que $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$, para todos $X, Y \subseteq A$. Sejam $x, y \in A$ tais que $f(x) = f(y)$. Então, $b = f(x) \in f(\{x\})$ e $b = f(y) \in f(\{y\})$, pelo que

$$b \in f(\{x\}) \cap f(\{y\}) = f(\{x\} \cap \{y\}).$$

Logo, $\{x\} \cap \{y\} \neq \emptyset$, o que só acontece se $x = y$. Estamos em condições de concluir que f é injetiva.

2. [$\Rightarrow$] Suponhamos que f é sobrejetiva. Seja $X \subseteq A$. Então,

$$\begin{aligned} b \in B \setminus f(X) & \Leftrightarrow b \in B \wedge b \notin f(X) \\ & \Leftrightarrow (\exists a \in A) b = f(a) \wedge f(a) \notin f(X) \\ & \Rightarrow (\exists a \in A) b = f(a) \wedge a \notin X \\ & \Leftrightarrow (\exists a \in A \setminus X) b = f(a) \Leftrightarrow b \in f(A \setminus X). \end{aligned}$$

Assim, $B \setminus f(X) \subseteq f(A \setminus X)$.

[$\Leftarrow$] Suponhamos que $B \setminus f(X) \subseteq f(A \setminus X)$ para todo $X \subseteq A$. Então, considerando $X = \emptyset$, obtemos $B = f(A)$, pelo que f é sobrejetiva.

3. [$\Rightarrow$] Suponhamos que f é bijetiva. Seja $X \subseteq A$. Como f é sobrejetiva, temos, por 2., que $B \setminus f(X) \subseteq f(A \setminus X)$. Para concluirmos a igualdade, falta apenas provar a outra inclusão. Se $b \in f(A \setminus X)$, então, existe $a \in A \setminus X$ tal que $f(a) = b$. Vamos provar que $b \notin f(X)$. Se existisse $x \in X$ tal que $f(x) = b$, teríamos $f(x) = f(a)$. Mas, como f é injetiva, teríamos $x = a \in X \cap A \setminus X = \emptyset$, o que é uma contradição. Logo. $b \in B \setminus f(X)$.

   [$\Leftarrow$] Suponhamos que $B \setminus f(X) = f(A \setminus X)$ para todo $X \subseteq A$. Então, por 2., f é sobrejetiva. A injetividade de f resulta de, para todo $a \in A$, $B \setminus f(\{a\}) = f(A \setminus \{a\})$. De facto, se $a_1 \neq a_2$, temos que $f(a_1) \neq f(a_2)$.