Funções

Dados conjuntos A e B, uma **função** f de A para B é "algo"
(uma regra? uma correspondência?)
que a cada elemento de A faz corresponder um e um só elemento de B.

(O que é uma regra? O que é uma correspondência?)

Mais formalmente:
Uma relação binária f de A para B diz-se **funcional** se
$\forall_{x\in A}\,\forall_{y\in B}\,\forall_{z\in B}\,\big(((x,y)\in f \wedge (x,z)\in f) \Rightarrow y=z\big)$

Uma **função** do conjunto A para o conjunto B é um terno (f,A,B), representado por $f : A \to B$, onde f é uma relação funcional de A para B, com domínio A.

(Ou seja, além da condição de f ser uma relação funcional, tem-se $\forall_{x\in A}\,\exists_{y\in B}\,(x,y)\in f$).

Dada uma função $f : A \to B$, normalmente representa-se por $f(a)$ o único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$;
assim, escreve-se $f(a) = b$, em vez de $(a, b) \in f$ ou $a\ f\ b$.

A diz-se também o **domínio** da função $f : A \to B$.

Ao conjunto B chama-se **conjunto de chegada** da função $f : A \to B$.

O **contradomínio** de $f : A \to B$ é o contradomínio da relação f; isto é, é o conjunto $\{y \in B \mid \exists_{x \in A} : f(x) = y\}$.

Normalmente chama-se função só à relação funcional f e se não houver perigo de confusão falaremos na "função f", em vez de "função $f : A \to B$"; mas, por exemplo, a relação

$f = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$

pode dar origem às funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ que formalmente são distintas, por terem conjuntos de chegada distintos.

Quando temos uma expressão explícita de $f(x)$ para cada $x \in A$, podemos apresentar a função $f : A \to B$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto [\text{expressão de } f(x)] \end{aligned}$$

Ex.:

- $$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto n^2 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} g : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto \begin{cases} n & \text{se } n \geq 0 \\ -n & \text{se } n < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Dado um conjunto A, a **função identidade** em A é a função

$$\begin{aligned} id_A : A &\rightarrow A \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

Uma função $f : A \rightarrow B$ diz-se **constante** se existe $b \in B$ tal que $f(x) = b$, para todo o $x \in A$.

Por exemplo, a função

$$\begin{aligned} f : \{1, 2, 3\} &\rightarrow \{3, 4\} \\ 1 &\mapsto 3 \\ 2 &\mapsto 3 \\ 3 &\mapsto 3 \end{aligned}$$

é constante.

Sejam $f : A \to B$ uma função, $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$.

- A **imagem** de X por f é o conjunto $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$.
- A **pré-imagem**, ou **imagem inversa**, de Y por f é o conjunto $f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$.

Ex.:

- Consideremos a função $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & n & \mapsto & n^2 \end{array}$.
  $f(\{-1, 0, 1, 2\}) = \{0, 1, 4\}$;
  $f^{-1}(\{0, 1, 2, 3, 4\}) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
- Dada qualquer função $f : A \to B$, a imagem de A é o contradomínio de f; e a pré-imagem de B é o domínio A.

Algumas propriedades

Sejam $f : A \to B$ uma função, $X_1, X_2 \subseteq A$ e $Y_1, Y_2 \subseteq B$. Então

1. $f(\varnothing) = \varnothing$
2. $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$
3. $f^{-1}(B) = A$
4. Se $X_1 \subseteq X_2$, então $f(X_1) \subseteq f(X_2)$
5. $f(X_1) \subseteq Y_1$ se e só se $X_1 \subseteq f^{-1}(Y_1)$
6. $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$
7. $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$
8. $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$
9. $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$

Dadas funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$, a **função composta** de g com f ("g após f") é a função

$$\begin{array}{rcl} g \circ f : A & \to & C \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Ex.:

Consideremos as funções $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n^2 \end{array}$ e $\begin{array}{rcl} g : \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$;

com estas funções formam-se as compostas $\begin{array}{rcl} g \circ f : \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n^2+1 \end{array}$

e $\begin{array}{rcl} f \circ g : \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & (n+1)^2 \end{array}$

[Nota: $g \circ f$, entendida como relação funcional, é precisamente a composta das relações funcionais g e f.]

Seja $f : A \to B$ uma função. Diz-se que

- $f : A \to B$ é **injetiva** se $\forall_{x \in A}\, \forall_{y \in A}\, (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$
  (ou, equivalentemente, se $\forall_{x \in A}\, \forall_{y \in A}\, (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$))
- $f : A \to B$ é **sobrejetiva** se $\forall_{y \in B}\, \exists_{x \in A} : f(x) = y$
- $f : A \to B$ é **bijetiva** se é injetiva e sobrejetiva
  (neste caso, também se diz que $f : A \to B$ é uma **bijeção**)

Ex.:

Consideremos as funções $\begin{array}{rccc} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_0^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ e $\begin{array}{rccc} g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$;

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ é sobrejetiva, mas não é injetiva;
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva nem injetiva;

e ainda as funções $\begin{array}{rccc} h : \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$ e $\begin{array}{rccc} k : \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$;

$h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é injetiva, mas não é sobrejetiva;
$k : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ é bijetiva.

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções.

- Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são injetivas, então $g \circ f : A \to C$ é injetiva.
- Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são sobrejetivas, então $g \circ f : A \to C$ é sobrejetiva.
- Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são bijetivas, então $g \circ f : A \to C$ é bijetiva.

Uma função $f : A \to B$ é injetiva se e só se a relação f^{-1} é funcional.

Uma função $f : A \to B$ é sobrejetiva se e só se o domínio da relação f^{-1} é o conjunto B.

Uma função $f : A \to B$ é bijetiva se e só se existe a função $f^{-1} : B \to A$.

Seja $f : A \to B$ uma função bijetiva. Chamamos **função inversa** à função $f^{-1} : B \to A$ e dizemos que $f : A \to B$ é **invertível**.

Se $f : A \to B$ é invertível,

- $f^{-1} \circ f = id_A$; e
- $f \circ f^{-1} = id_B$.

Seja $f : A \to B$ uma função invertível. A única função g tal que $g \circ f = id_A$ e $f \circ g = id_B$ é $g = f^{-1}$.

Se $f : A \to B$ não é bijetiva, não existe nenhuma função g tal que $g \circ f = id_A$ e $f \circ g = id_B$.

Seja $f : A \to B$ uma função invertível; então $f^{-1} : B \to A$ também é invertível e a sua inversa é $f : A \to B$.

Ex.:
Consideremos as funções $\begin{array}{rccc} k : & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & n & \mapsto & n+1 \end{array}$ e $\begin{array}{rccc} j : & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & n & \mapsto & n-1 \end{array}$
Cada uma destas funções é inversa da outra.

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções bijetivas. Então a função $g \circ f$ é invertível e $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Nota: Se uma função $f : A \to B$ é injetiva mas não sobrejetiva ($f(A) = C \subsetneq B$), a mesma relação funcional f dá origem a uma função bijetiva $f : A \to C$;
e a relação f^{-1} dá origem a uma função $f^{-1} : C \to A$;
esta função não é inversa de $f : A \to B$ $\quad (f \circ f^{-1} = id_C \neq id_B)$;
mas é inversa da função $f : A \to C$ e é frequentemente chamada, com alguma ambiguidade, inversa de f.

Ex.:
Consideremos a função $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}_0^+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$;
esta função é injetiva, mas não sobrejetiva, logo, estritamente falando não tem inversa;
mas a função $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}_0^+ & \to & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$ tem inversa,
que é $\begin{array}{rccc} f^{-1} : & \mathbb{R}_0^+ & \to & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$.