Tópicos de Matemática

Lic. Ciências da Computação
2021/2022

5. Relações binárias

No dia a dia é usual definirmos relações entre objetos, tais como a relação de *igualdade* entre objetos, a relação *menor do que* entre inteiros, a relação de *inclusão* entre conjuntos. Neste capítulo formaliza-se a noção de relação binária entre objetos e estudam-se algumas propriedades a respeito deste tipo de relações.

5.1 Noções básicas

A noção de relação entre dois objetos baseia-se na ideia de que esses objetos estão associados de alguma forma. Assim sendo, define-se relação binária como um conjunto de pares ordenados e os seus elementos são os pares ordenados (a, b) tais que a está associado a b.

Definição 5.1. *Dados conjuntos A e B, chamamos* ***relação binária de** A **em** B* *a qualquer subconjunto R de $A \times B$. Quando $A = B$, diz-se que R é uma relação binária em A.*
Se $(a, b) \in R$, diz-se que a ***está relacionado com** b **por** R* *e escreve-se $a\,R\,b$. Se $(a, b) \notin R$, diz-se que a* ***não está relacionado com** b **por** R* *e escreve-se $a \not{R}\, b$.*

Exemplo 5.1.

(1) Sendo A o conjunto de alunos da Licenciatura em Ciências da Computação (L.C.C.) e D o conjunto de disciplinas do plano de estudos deste curso, podemos definir uma relação R de A em D da seguinte forma: dados $a \in A$ e $d \in D$, $(a, d) \in R$ se d é uma disciplina do 1º ano do curso e o aluno a está inscrito na disciplina d.

(2) Sejam $A = \{2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

(α) São exemplos de relações binárias de A em B as que a seguir se listam:

(i) $R = \{(2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6)\}$;
(ii) $S = \{(2, 5)\}$;
(iii) $\emptyset$;
(iv) $A \times B$.

A respeito da relação R verifica-se que esta pode ser definida por

$$a\,R\,b \text{ se e só se } a \text{ divide } b, \text{ para quaisquer } a \in A \text{ e } b \in B.$$

No caso da relação S, o par $(5,2)$ não é elemento de S, pelo que $5 \not S 2$.

(β) $T = \{(2,3),(3,2),(3,4)\}$ não é uma relação binária de A em B, visto que $(3,2) \notin A \times B$.

(3) Sejam $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ e R a relação binária de A em B definida por

$$a\,R\,b \text{ se e só se } b = 2a.$$

Então

$$R = \{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8)\}.$$

Note-se que $1 \not R 3$, pois $3 \neq 2 \times 1$.

(4) Dados conjuntos A e B, uma função $f : A \to B$ é uma relação binária de A em B.

Dados conjuntos A e B, o conjunto de todas as relações binárias de A em B é o conjunto $\mathcal{P}(A \times B)$. Se os conjuntos A e B forem finitos, com n e m elementos, respetivamente, então $A \times B$ tem nm elementos, pelo que $\mathcal{P}(A \times B)$ tem 2^{nm} elementos. Assim, existem 2^{nm} relações binárias de A em B. Em particular, os conjuntos $\emptyset$ e $A \times B$ são relações binárias de A em B, designadas, respetivamente, por **relação vazia** e **relação universal**.

Dado um conjunto não vazio A,

$$id_A = \{(a,a) \mid a \in A\} \quad \text{e} \quad \omega_A = A^2 = \{(x,y) \mid x,y \in A\}$$

são relações binárias em A designadas, respetivamente, por **relação identidade em** A e **relação universal em** A.

Definição 5.2. *Dados conjuntos A e B e uma relação binária R de A em B, chamamos:*

- **domínio de** R *ao conjunto*

$$\text{Dom}(R) = \{a \mid \exists_{b \in B}\ (a,b) \in R\};$$

- **imagem** *ou* **contradomínio de** R *ao conjunto*

$$\text{Im}(R) = \{b \mid \exists_{a \in A}\ (a,b) \in R\}.$$

Exemplo 5.2.
(1) Sendo R a relação definida em (1) do Exemplo 5.1 tem-se

- $\text{Dom}R = \{a \in A \mid$ *a está inscrito em, pelo menos, uma disciplina do* 1^o *ano da L.C.C*$\}$*;*

- $\text{Im}R = \{d \in D \mid$ *existe, pelo menos, um aluno do* 1^o *ano da L.C.C. inscrito em d*$\}$*.*

(2) Consideremos os conjuntos $A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ *e a relação* R *de* A *em* B *definida por* $(a, b) \in R$ *se e só se* $a < b$. *Então temos:*

- $R = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\}$*;*
- $\mathrm{Dom}(R) = \{2, 4\}$ *e* $\mathrm{Im}(R) = \{3, 4, 5\}$.

Duas relações binárias R e S de um conjunto A num conjunto B são iguais se os conjuntos R e S são iguais. Assim, se $R = S$, tem-se $\mathrm{Dom}(R) = \mathrm{Dom}(S)$ e $\mathrm{Im}(R) = \mathrm{Im}(S)$. Note-se, no entanto, que não é necessariamente verdade que $R = S$ sempre que $\mathrm{Dom}(R) = \mathrm{Dom}(S)$ e $\mathrm{Im}(R) = \mathrm{Im}(S)$.

Seguidamende apresentam-se alguns processos que permitem obter novas relações a partir de relações dadas.

Uma vez que uma relação binária é um conjunto, podemos construir novas relações recorrendo aos processos estudados anteriormente para obter novos conjuntos a partir de conjuntos dados. Assim, se R e S são relações binárias de A em B, o mesmo acontece com $R \cup S$, $R \cap S$, $R \setminus S$.

Exemplo 5.3. *Sejam* $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 5, 6\}$ *e consideremos as relações* $R = \{(1, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 5)\}$ *e* $S = \{(2, 4), (2, 6), (3, 5)\}$. *Então são relações binárias de* A *em* B*:*

- $R \cap S = \{(2, 4), (3, 5)\}$*;*
- $R \cup S = \{(1, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 2), (3, 5)\}$*;*
- $R \setminus S = \{(1, 2), (3, 2)\}$.

Além destes processos para obter novas relações, existem outros que são específicos das relações binárias.

Definição 5.3. *Sejam* A, B *conjuntos e* R *uma relação binária de* A *em* B. *Chama-se* **relação inversa de** R, *e representa-se por* R^{-1}, *a relação de* B *em* A *definida por*

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}.$$

Exemplo 5.4. *Consideremos os conjuntos* $A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ *e a relação* R *de* A *em* B *definida por* $(a, b) \in R$ *se e só se* $a < b$. *Uma vez que* $R = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\}$ *tem-se*

$$R^{-1} = \{(3, 2), (4, 2), (5, 2), (5, 4)\}.$$

Proposição 5.4. *Sejam* A, B *conjuntos e* R *e* S *relações binárias de* A *em* B. *Então*

(1) $\mathrm{Dom}(R^{-1}) = \mathrm{Im}(R)$ *e* $\mathrm{Im}(R^{-1}) = \mathrm{Dom}(R)$.

(2) $(R^{-1})^{-1} = R$.

(3) Se $R \subseteq S$, *então* $R^{-1} \subseteq S^{-1}$.

Demonstração. Apresenta-se a prova das propriedades (1) e (2), ficando a prova de (3) como exercício.

(1) Facilmente prova-se que $\mathrm{Dom}(R^{-1}) = \mathrm{Im}(R)$. De facto, para qualquer objeto y,

$$\begin{aligned} y \in \mathrm{Dom}(R^{-1}) &\Leftrightarrow \exists_{x \in A}\, (y, x) \in R^{-1} \\ &\Leftrightarrow \exists_{x \in A}\, (x, y) \in R \\ &\Leftrightarrow y \in \mathrm{Im}(R). \end{aligned}$$

A prova de $\mathrm{Im}(R^{-1}) = \mathrm{Dom}(R)$ é análoga.

(2) Uma vez que $R \subseteq A \times B$ e $(R^{-1})^{-1} \subseteq A \times B$ e, para qualquer $(x, y) \in A \times B$,

$$\begin{aligned} (x, y) \in R &\Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1} \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (R^{-1})^{-1} \end{aligned},$$

concluímos que $R = (R^{-1})^{-1}$. □

Definição 5.5. *Sejam* A, B, C *e* D *conjuntos,* R *uma relação binária de* A *em* B *e* S *uma relação binária de* C *em* D. *Chama-se* **relação composta de** S **com** R, *e representa-se por* $S \circ R$, *a relação binária de* A *em* D *definida por*

$$S \circ R = \{(x, y) \mid \exists\, z \in B \cap C : (x, z) \in R \wedge (z, y) \in S\}.$$

Note-se que, nas condições da definição anterior, se $B \cap C = \emptyset$, tem-se $S \circ R = \emptyset$.

Exemplo 5.5. *Sejam* $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{0, 2, 3, 4\}$ *e* $D = \{0, 1, 3, 5\}$ *e consideremos as relações binárias*

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 4)\} \subseteq A \times B,$$

$$S = \{(0, 1), (3, 0), (3, 3), (3, 5), (4, 0)\} \subseteq C \times D.$$

Então

(1) $S \circ R = \{(1, 0), (1, 3), (1, 5), (2, 0)\}$;

(2) $R \circ S = \{(0, 2), (0, 3)\}$.

Do exemplo anterior podemos concluir que a composição de relações binárias não é, em geral, comutativa.

Proposição 5.6. *Sejam* R, S *e* T *relações binárias. Então*

(1) $\mathrm{Dom}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Dom}(R)$ *e* $\mathrm{Im}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Im}(S)$.

(2) $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$.

(3) $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

Demonstração. (1) Resulta facilmente da definição de relação composta. Com efeito, se $x \in \mathrm{Dom}(S \circ R)$, então existe y tal que $(x, y) \in S \circ R$. Logo existe z tal que $(x, z) \in R$ e $(z, y) \in S$. Portanto, $x \in \mathrm{Dom}R$. Desta forma, provámos que $\mathrm{Dom}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Dom}R$.
De forma semelhante prova-se que $\mathrm{Im}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Im}S$.

(2) Seja $(x, y) \in (T \circ S) \circ R$. Então existe z tal que $(x, z) \in R$ e $(z, y) \in T \circ S$. De $(z, y) \in T \circ S$ segue que existe w tal que $(z, w) \in S$ e $(w, y) \in T$. Dado que $(x, z) \in R$ e $(z, w) \in S$, então $(x, w) \in S \circ R$. Agora, de $(x, w) \in S \circ R$ e de $(w, y) \in T$, tem-se $(x, y) \in T \circ (S \circ R)$. Logo $(T \circ S) \circ R \subseteq T \circ (S \circ R)$. De modo análogo, prova-se que $T \circ (S \circ R) \subseteq (T \circ S) \circ R$.

(3) Para todo o objeto (x, y),

$$\begin{aligned}
(x, y) \in (S \circ R)^{-1} &\Leftrightarrow (y, x) \in S \circ R \\
&\Leftrightarrow \exists_z \; (y, z) \in R \wedge (z, x) \in S \\
&\Leftrightarrow \exists_z \; (z, y) \in R^{-1} \wedge (x, z) \in S^{-1} \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in R^{-1} \circ S^{-1}.
\end{aligned}$$

□

Seguidamente referem-se algumas propriedades que permitem definir classes especiais de relações binárias.

Definição 5.7. *Sejam A um conjunto e R uma relação binária em A. Diz-se que:*

- *R é* **reflexiva** *se*
$$\forall_{a \in A} \; (a, a) \in R;$$
- *R é* **simétrica** *se*
$$\forall_{a,b \in A} \; ((a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R);$$
- *R é* **antissimétrica** *se*
$$\forall_{a,b \in A} \; (((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \Rightarrow a = b);$$
- *R é* **transitiva** *se*
$$\forall_{a,b,c \in A} \; (((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \Rightarrow (a, c)) \in R.$$

Note-se que uma relação binária R em A é antissimétrica se e só se

$$\forall_{a,b \in A} \; ((a, b) \in R \wedge a \neq b) \Rightarrow (b, a) \notin R.$$

Exemplo 5.6. *(1) Sejam* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *e*

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3), (4,4)\}, \\ R_2 &= \{(1,4), (2,2), (2,3), (3,2), (4,1)\}, \\ R_3 &= \{(2,3)\}. \end{aligned}$$

Uma vez que $(1,1), (2,2), (3,3), (4,4) \in R_1$*, a relação* R_1 *é reflexiva. O par* $(1,2)$ *é elemento de* R_1*, mas* $(2,1) \notin R_1$*, logo* R_1 *não é simétrica. Atendendo a que não existem elementos distintos* $a, b \in A$ *tais que* $(a,b) \in R_1$ *e* $(b,a) \in R_1$*, podemos afirmar que a relação* R_1 *é antissimétrica. Além disso,*

$$\begin{array}{c} ((1,1) \in R_1 \wedge (1,1) \in R_1) \wedge (1,1) \in R_1 \\ ((1,1) \in R_1 \wedge (1,2) \in R_1) \wedge (1,2) \in R_1 \\ ((1,1) \in R_1 \wedge (1,3) \in R_1) \wedge (1,3) \in R_1 \\ ((1,2) \in R_1 \wedge (2,2) \in R_1) \wedge (1,2) \in R_1 \\ ((1,2) \in R_1 \wedge (2,3) \in R_1) \wedge (1,3) \in R_1 \\ ((1,3) \in R_1 \wedge (3,3) \in R_1) \wedge (1,3) \in R_1 \\ ((2,2) \in R_1 \wedge (2,2) \in R_1) \wedge (2,2) \in R_1 \\ ((2,2) \in R_1 \wedge (2,3) \in R_1) \wedge (2,3) \in R_1 \\ ((3,3) \in R_1 \wedge (3,3) \in R_1) \wedge (3,3) \in R_1 \\ ((4,4) \in R_1 \wedge (4,4) \in R_1) \wedge (4,4) \in R_1 \end{array}$$

e, portanto, R_1 *é transitiva.*

Uma vez que $1 \in A$ *e o par* $(1,1)$ *não é elemento de* R_2*, então* R_2 *não é reflexiva. Esta mesma relação é simétrica, pois, para quaisquer* $a, b \in A$*,*

$$(a,b) \in R_2 \Rightarrow (b,a) \in R_2;$$

de facto,

$$\begin{array}{c} (1,4) \in R_2 \wedge (4,1) \in R_2 \\ (2,2) \in R_2 \wedge (2,2) \in R_2 \\ (2,3) \in R_2 \wedge (3,2) \in R_2 \\ (3,2) \in R_2 \wedge (2,3) \in R_2 \\ (4,1) \in R_2 \wedge (1,4) \in R_2. \end{array}$$

Facilmente verificamos que R_2 *não é antissimétrica, pois* $1 \neq 4$, $(1,4) \in R_2$ *e* $(4,1) \in R_2$*. Esta mesma relação também não é transitiva:* $(1,4) \in R_2 \wedge (4,1) \in R_2$*, mas* $(1,1) \notin R_2$*.*

No que diz respeito à relação R_3*, é simples verificar que esta é uma relação transitiva, antissimétrica, não reflexiva e não simétrica.*

(2) Seja A *um conjunto não vazio. A relação* id_A *e a relação universal* ω_A *são relações simultaneamente reflexivas, simétricas e transitivas.*

Proposição 5.8. *Sejam A um conjunto e R uma relação binária em A. Então*

(1) R é reflexiva se e só se $id_A \subseteq R$;

(2) R é simétrica se e só se $R^{-1} = R$;

(3) R é transitiva se e só se $R \circ R \subseteq R$;

(4) R é antissimétrica se e só se $R \cap R^{-1} \subseteq id_A$.

Demonstração. Exercício. □

5.2 Relações de equivalência

Na secção anterior vimos que a relação identidade id_A e a relação universal ω_A definidas num conjunto A são relações reflexivas, simétricas e transitivas. Relações que verifiquem simultaneamente estas propriedades são designadas por *relações de equivalência*.

Definição 5.9. *Seja A um conjunto. Uma relação binária R em A diz-se uma* **relação de equivalência** *se R é reflexiva, simétrica e transitiva.*

Exemplo 5.7. *Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e consideremos a relação*

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (2, 4), (4, 2)\}.$$

A relação R é reflexiva, pois

$$\mathrm{id}_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\} \subseteq R.$$

A relação é simétrica, uma vez que

$$R^{-1} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (3, 2), (2, 3), (4, 3), (3, 4), (4, 2), (2, 4)\} = R.$$

A relação R também é transitiva, pois

$$R \circ R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (2, 4), (4, 2)\} \subseteq R.$$

Logo R é uma relação de equivalência.

Exemplo 5.8. *A relação R definida no conjunto $A = \{x \,|\, x$ é aluno da L.C.C.$\}$ por*

$$x\,R\,y \text{ se e só se } x \text{ e } y \text{ nasceram no mesmo ano}$$

é uma relação de equivalência em A.

Exemplo 5.9. *Sejam A e B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. A relação binária definida em A por*

$$x\,R_f\,y \text{ se e só se } f(x) = f(y)$$

é uma relação de equivalência em A. De facto,

- R_f é reflexiva, pois, para todo $x \in A$, $f(x) = f(x)$ e, portanto, $x\,R_f\,x$;

- R_f é simétrica, uma vez que para quaisquer $x, y \in A$,

$$x\,R_f\,y \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow f(y) = f(x) \Rightarrow y\,R_f\,x;$$

- R_f é transitiva, pois para quaisquer $x, y, z \in A$,

$$(x\,R_f\,y \wedge y\,R_f\,z) \Rightarrow (f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z)) \Rightarrow f(x) = f(z) \Rightarrow x\,R_f\,z.$$

Exemplo 5.10. *Seja R a relação binária em $\mathbb{Z}$ definida por*

$$a\,R\,b \text{ se e só se } a - b \text{ é divisível por } 3.$$

É simples verificar que R é uma relação de equivalência. Com efeito, para todo $a \in \mathbb{Z}$, $a - a = 0$ é divisível por 3, logo $a\,R\,a$. Portanto, R é reflexiva. Por outro lado, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$, se $a\,R\,b$, então $a - b = 3k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Logo $b - a = 3(-k)$, com $-k \in \mathbb{Z}$ e, por conseguinte, $b\,R\,a$. Assim, R é simétrica. Além disso, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se $a\,R\,b$ e $b\,R\,c$, então $a - b = 3k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$ e $b - c = 3k'$, para algum $k' \in \mathbb{Z}$. Logo $a - c = (a - b) + (b - c) = 3(k + k')$, com $k + k' \in \mathbb{Z}$, pelo que $a\,R\,c$. Logo R é transitiva.
Note-se que, dado $a \in \mathbb{Z}$, tem-se

$$\begin{aligned} 1\,R\,a &\Leftrightarrow 1 - a = 3k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow a = 3k + 1, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow a \text{ tem resto 1 na divisão inteira por 3.} \end{aligned}$$

De modo análogo, prova-se que $2\,R\,a$ se e só se a tem resto 2 na divisão inteira por 3 e que $0\,R\,a$ se e só se a tem resto 0 na divisão inteira por 3. Assim, uma vez que os únicos restos possíveis na divisão inteira por 3 são $0, 1, 2$ e atendendo a que R é uma relação de equivalência, os elementos de $\mathbb{Z}$ podem ser agrupados nos seguintes três subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} X_0 &= \{a \mid a \in \mathbb{Z} \wedge 0Ra\} = \{a \mid a \in \mathbb{Z} \wedge \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ a = 3k\} \\ X_1 &= \{a \mid a \in \mathbb{Z} \wedge 1Ra\} = \{a \mid a \in \mathbb{Z} \wedge \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ a = 3k + 1\} \\ X_2 &= \{a \mid a \in \mathbb{Z} \wedge 2Ra\} = \{a \mid a \in \mathbb{Z} \wedge \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ a = 3k + 2\} \end{aligned}$$

Definição 5.10. *Sejam R uma relação de equivalência num conjunto A e $x \in A$. Chama--se* **classe de equivalência de x módulo R** *ou, caso não haja ambiguidade, classe de equivalência de x, ao conjunto*

$$[x]_R = \{y \mid y \in A \wedge x\,R\,y\}.$$

Ao conjunto de todas as classes de equivalência dos elementos de A chamamos **conjunto quociente de A módulo R** *e representamo-lo por A/R, i.e.,*

$$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}.$$

Exemplo 5.11. *Considerando a relação de equivalência R definida no exemplo anterior, tem-se*

$$[0]_R = \{a \,|\, a \in \mathbb{Z} \wedge \exists_{k\in\mathbb{Z}}\ a = 3k\},$$
$$[1]_R = \{a \,|\, a \in \mathbb{Z} \wedge \exists_{k\in\mathbb{Z}}\ a = 3k+1\}$$
$$[2]_R = \{a \,|\, a \in \mathbb{Z} \wedge \exists_{k\in\mathbb{Z}}\ a = 3k+2\},$$

e $\mathbb{Z}/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R\}$.

Exemplo 5.12. *Seja* $A = \{1,2,3,4\}$ *e consideremos a relação de equivalência em* A *definida por*

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(2,4),(4,2)\}.$$

Então

$$[1]_R = \{1\} \text{ e } [2]_R = [3]_R = [4]_R = \{2,3,4\}$$

e

$$A/R = \{[1]_R, [2]_R\}.$$

Exemplo 5.13. *Seja* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *a função definida por* $f(n) = |n|$, *para qualquer* $n \in \mathbb{N}$, *e seja* R_f *a relação de equivalência associada a* f, *isto é, seja* R_f *a relação binária em* $\mathbb{Z}$ *definida por*

$$x\, R_f\, y \text{ se e só se } f(x) = f(y).$$

Então, para cada $x \in \mathbb{Z}$,

$$[x]_{R_f} = \{y \,|\, y \in \mathbb{Z} \wedge\ x\, R_f\, y\} = \{y \,|\, y \in \mathbb{Z} \wedge f(x) = f(y)\} = \{x, -x\}$$

e

$$\mathbb{Z}/R_f = \{\{x,-x\} \,|\, x \in \mathbb{Z}\}.$$

A respeito do conjunto quociente indicado em cada um dos exemplos anteriores verifica--se o seguinte: os seus elementos são conjuntos não vazios, são disjuntos dois a dois e a união dos seus elementos é o conjunto no qual está definida a relação binária. Estes conjuntos quociente satisfazem as condições do conceito a seguir definido.

Definição 5.11. *Sejam* A *um conjunto e* $\Pi \subseteq \mathcal{P}(A)$. *Diz-se que* Π *é uma* **partição do conjunto** A *se satisfaz simultaneamente as seguintes condições:*

(1) para todo $X \in \Pi$, $X \neq \emptyset$;

(2) para todo $X, Y \in \Pi$, $(X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset)$;

(3) para todo $a \in A$, *existe* $X \in \Pi$ *tal que* $a \in X$.

Exemplo 5.14. *Sejam* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *e*

$$\Pi_1 = \{\{1, 2\}, \{\}, \{3, 4, 5\}\}, \quad \Pi_2 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\},$$
$$\Pi_3 = \{\{1, 2\}, \{4, 5\}\}, \qquad \Pi_4 = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}.$$

Nenhum dos conjuntos Π_1, Π_2, Π_3 *é uma partição de* A*. Com efeito:*

- $\emptyset \in \Pi_1$ *e, portanto, o conjunto* Π_1 *não verifica a condição (1) da definição anterior;*
- *o conjunto* Π_2 *não satisfaz a condição (2), pois* $X = \{1, 2\} \in \Pi_2$*,* $Y = \{2, 3\} \in \Pi_2$*,* $X \neq Y$ *e* $X \cap Y \neq \emptyset$*;*
- *no caso do conjunto* Π_3 *falha a condição (3), uma vez que* $3 \in A$ *e não existe* $X \in \Pi_3$ *tal que* $3 \in X$*.*

No que diz respeito ao conjunto Π_4*, é simples verificar que qualquer uma das condições (1) a (3) da definição anterior é satisfeita e, portanto,* Π_4 *é uma partição de* A*.*

A cada relação de equivalência definida num conjunto A está sempre associada uma partição de A, como se pode verificar pelo resultado que a seguir se prova.

Proposição 5.12. *Seja* R *uma relação de equivalência num conjunto* A*. Então* A/R *é uma partição de* A*.*

Demonstração. Sendo R uma relação de equivalência em A, prova-se facilmente que A/R é uma partição de A. De facto:

(1) Uma vez que R é reflexiva, tem-se xRx, para todo $x \in A$, e, portanto, $x \in [x]_R$. Logo, para todo $[x]_R \in A/R$, $[x]_R \neq \emptyset$.

(2) Dadas duas classes de equivalência $[x]_R, [y]_R \in A/R$, se $[x]_R \neq [y]_R$, então $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$. Com efeito, se admitirmos que $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$, existe $z \in A$ tal que $z \in [x]_R$ e $z \in [y]_R$. Assim $x\,R\,z$ e $y\,R\,z$ e, uma vez que R é simétrica, temos também $z\,R\,y$. Daqui segue que, para todo $a \in A$,

$$\begin{aligned} a \in [x]_R \;&\Rightarrow\; x\,R\,a \\ &\Rightarrow\; a\,R\,x \qquad (R \text{ é simétrica}) \\ &\Rightarrow\; a\,R\,z \qquad (x\,R\,z \text{ e } R \text{ é transitiva}) \\ &\Rightarrow\; a\,R\,y \qquad (z\,R\,y \text{ e } R \text{ é transitiva}) \\ &\Rightarrow\; y\,R\,a \qquad (R \text{ é simétrica}) \\ &\Rightarrow\; a \in [y]_R. \end{aligned}$$

e, portanto, $[x]_R \subseteq [y]_R$. De forma análoga prova-se que $[y]_R \subseteq [x]_R$. Logo $[x]_R = [y]_R$.

(3) Para todo $x \in A$, tem-se $x\,R\,x$ e, portanto, existe $[x]_R \in A/R$ tal que $x \in [x]_R$.

Assim, por (1), (2) e (3), temos que A/R é uma partição de A. □

O recíproco do resultado anterior também é válido, ou seja, cada partição de um conjunto define uma relação de equivalência nesse conjunto.

Proposição 5.13. *Sejam A um conjunto, Π uma partição de A e R_Π a relação binária em A definida por*

$$x \, R_\Pi \, y \text{ se e só se existe } X \in \Pi \text{ tal que } x, y \in X.$$

Então R_Π é uma relação de equivalência em A.

Demonstração. (1) Uma vez que Π é uma partição de A, então, para todo $x \in A$, existe $X \in \Pi$ tal que $x \in X$. Logo $x \, R_\Pi \, x$ e, portanto, R_Π é reflexiva.
(2) Dados $x, y \in A$, se $x \, R_\Pi \, y$, é óbvio que também temos $y \, R_\Pi \, x$; logo R_Π é simétrica.
(3) Dados $x, y, z \in A$, se $x \, R_\Pi \, y$ e $y \, R_\Pi \, z$, existem $X, Y \in \Pi$ tais que $x, y \in X$ e $y, z \in Y$. Dado que $y \in X \cap Y$, tem-se $X \cap Y \neq \emptyset$ e, como Π é uma partição de A, segue que $X = Y$. Assim, existe $X \in \Pi$ tal que $x, z \in X$ e, portanto, $x \, R_\Pi \, z$. Logo R_Π é transitiva.
De (1), (2) e (3) concluímos que R_Π é uma relação de equivalência em A. □

Exemplo 5.15.

(1) Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $\Pi_1 = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}\}$, $\Pi_2 = \{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}\}$ partições de A. Então

$$\begin{aligned} R_{\Pi_1} &= \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,2), (2,1) \\ &\quad (3,4), (4,3), (3,5), (5,3), (4,5), (5,4)\}, \\ R_{\Pi_2} &= \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,3), (3,1)\}. \end{aligned}$$

(2) Seja $\Pi = \{X_0, X_1, X_2\}$ a partição de $\mathbb{Z}$ onde

$$X_0 = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \;\; X_1 = \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}, \;\; X_2 = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Então, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$a \, R_\Pi \, b \text{ se e só se } a - b \text{ é divisível } 3.$$

5.3 Relações de ordem

A noção de ordem pode ser encontrada nas mais diversas situações do dia a dia, e sob variadas formas, quando fazemos referência a expressões tais como: primeiro, segundo, terceiro; maior versus menor; melhor versus pior; precedência, preferência, ... Nesta secção formalizamos o que se entende por relação de ordem e apresentamos algumas noções relacionadas com este conceito.

5.3.1 Noções básicas

Definição 5.14. *Sejam A um conjunto e R uma relação binária em A. Diz-se que R é uma relação de* **ordem parcial em** *A se R é reflexiva, antissimétrica e transitiva. Se A é um conjunto não vazio e R é uma ordem parcial em A, ao par (A, R) dá-se a designação de* **conjunto parcialmente ordenado (c.p.o.)**.

Exemplo 5.16. *São exemplos de c.p.o.'s os seguintes pares:*

(1) (A, id_A)*, onde A é um conjunto não vazio e* $id_A = \{(a, a) : a \in A\}$.

(2) $(\mathbb{N}, \leq)$*, onde $\leq$ é a relação "menor ou igual" usual em $\mathbb{N}$ (para todo $x \in \mathbb{N}$, $x \leq x$, logo $\leq$ é reflexiva; para quaisquer $x, y \in \mathbb{N}$, se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$ e, portanto, $\leq$ é antissimétrica; para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{N}$, se $x \leq y$ e $y \leq z$, tem-se $x \leq z$, assim $\leq$ é transitiva. Então $\leq$ é uma relação de ordem parcial em $\mathbb{N}$).*

(3) $(\mathbb{N}, |)$*, onde $|$ é a relação "divide" em $\mathbb{N}$.*

(4) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$*, onde A é um conjunto qualquer e $\subseteq$ é a relação de inclusão usual.*

Em geral, sempre que tal não cause confusão, representamos uma ordem parcial num conjunto A por $\leq$ e o respectivo c.p.o. por $(A, \leq)$. Formalmente, um conjunto parcialmente ordenado é um par $(A; \leq)$, onde A é um conjunto não vazio e $\leq$ é uma relação de ordem parcial. Porém, caso seja claro a partir do contexto qual é a relação $\leq$, é usual dizer apenas "seja A um conjunto parcialmente ordenado".

Dado um c.p.o. $(A, \leq)$ e dados $a, b \in A$, escrevemos:

- $a \leq b$ e lemos "a é menor ou igual a b" ou "a precede b" para representar $(a, b) \in \leq$;
- $a \not\leq b$ e lemos "a não é menor ou igual a b" se $(a, b) \notin \leq$;
- $a < b$ e lemos "a é menor do que b" (ou a "precede propriamente b") se $a \leq b$ e $a \neq b$;
- $a << b$ e lemos "b é sucessor de a" (ou "b cobre a" ou "a é coberto por b") se $a < b$ e $\neg(\exists_{c \in A}\ a < c < b)$.

Diz-se que a, b são elementos **comparáveis** se $a \leq b$ ou $b \leq a$; caso contrário, ou seja, se $a \not\leq b$ e $b \not\leq a$, a e b dizem-se **incomparáveis** e escrevemos $a||b$.

Um c.p.o. $(A, \leq)$, em que A é um conjunto finito, pode ser representado por meio de um **diagrama de Hasse** da seguinte forma:

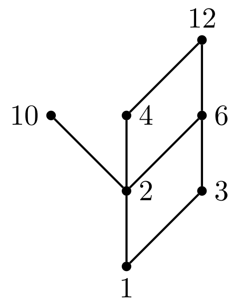
- cada elemento é representado por um ponto;
- se a, b são dois elementos de A tais que $a \leq b$, representa-se b acima de a; além disso se $a << b$ unem-se estes dois pontos por um segmento de reta.

Exemplo 5.17.

(1) Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 10, 12\}$ *e* $|$ *a ordem parcial definida por*

$$x \,|\, y \Leftrightarrow \exists_{k \in \mathbb{N}}\; y = kx.$$

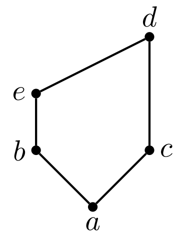
O c.p.o. $(A, |)$ *pode ser representado pelo seguinte diagrama de Hasse*



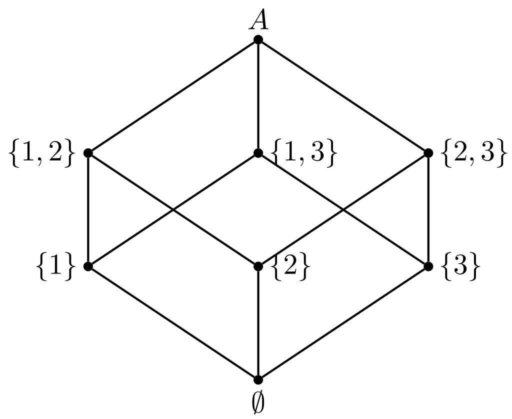
(2) Consideremos o conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ *e a relação binária* R *definida em* A *por*

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (a, c), (b, e), (c, d), (e, d)\}.$$

É simples verificar que R *é uma relação de ordem e que* $a << b$, $a << c$, $b << e$, $c << d$ *e* $e << d$. *Assim, a relação* R *pode ser representada pelo diagrama de Hasse seguinte*



(3) Seja $A = \{1, 2, 3\}$. *O c.p.o.* $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ *pode ser representado pelo diagrama de Hasse que se segue*



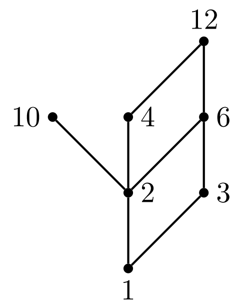
Dados um c.p.o. $(A, \leq)$ e X um suconjunto de A podem existir elementos com propriedades especiais relativamente a X.

Definição 5.15. *Sejam $(A, \leq)$ um c.p.o., X um subconjunto de A e $m \in A$. Dizemos que m é:*

- *um* **elemento maximal de** X *se* $m \in X$ *e* $\neg(\exists_{x \in X}\ m < x)$;
- *um* **elemento minimal de** X *se* $m \in X$ *e* $\neg(\exists_{x \in X}\ x < m)$;
- **majorante de** X *se* $\forall_{x \in X}\ x \leq m$;
- **minorante de** x *se* $\forall_{x \in X}\ m \leq x$;
- **supremo de** X *se m é majorante de X e $m \leq m'$, para qualquer m' majorante de X;*
- **ínfimo de** X *se m é minorante de X e $m' \leq m$, para qualquer m' minorante de X;*
- **máximo de** X *se m é majorante de X e $m \in X$;*
- **mínimo de** X *se m é minorante de X e $m \in X$.*

O conjunto dos majorantes de X e o conjunto dos minorantes de X são representados por $\text{Maj}(X)$ e $\text{Min}(X)$, respetivamente. Caso exista, o supremo (ínfimo, máximo, mínimo) de um subconjunto X de A é único e representa-se por $\sup(X)$ ($\inf(X)$, $\max(X)$, $\min(X)$).

Exemplo 5.18. *Consideremos novamente o c.p.o. $(A, |)$ representado por*



e sejam $X = \{1, 2, 3\}$ e $Y = \{2, 4, 6, 10\}$. Então:

- *2 e 3 são os elementos maximais de X; 1 é o único elemento minimal de X;*
- $\text{Maj}(X) = \{6, 12\}$; $\sup(X) = 6$; *não existe máximo de X;*
- $\text{Min}(X) = \{1\}$; $\inf(X) = 1$; $\min(X)$=*1*;
- *4, 6 e 10 são os elementos maximais de Y; 2 é o único elemento minimal de Y;*
- $\text{Maj}(Y) = \emptyset$; *não existe supremo de Y; não existe máximo de Y;*
- $\text{Min}(Y) = \{1, 2\}$; $\inf(Y) = 2$; $\min(Y) = 2$.

Relativamente ao conjunto A tem-se o seguinte:

- 10 *e* 12 *são os elementos maximais de A;* 1 *é o único elemento minimal de A;*
- $\mathrm{Maj}(A) = \emptyset$*; A não tem supremo; A não tem máximo;*
- $\mathrm{Min}(A) = \{1\}$*;* $\inf(A) = 1$*;* $\min(A)$*=1.*

Proposição 5.16. *Num conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$ são equivalentes as seguintes proposições, para quaisquer $a, b \in A$:*

(1) $a \leq b$*;*

(2) $\sup(\{a, b\}) = b$*;*

(3) $\inf(\{a, b\}) = a$*.*

Demonstração. *(1) ⇒ (2)* Admitamos que $a \leq b$. Então, uma vez que também temos $b \leq b$ (pois $\leq$ é reflexiva), segue que b é um majorante de $\{a, b\}$. Além disso, se x é um majorante de $\{a, b\}$, temos $b \leq x$. Logo b é o menor dos majorantes de $\{a, b\}$ e, portanto, $\sup(\{a, b\}) = b$.

(2) ⇒ (3) Admitamos que $\sup(\{a, b\}) = b$. Então b é um majorante de $\{a, b\}$, pelo que $a \leq b$. Assim, como $a \leq a$ e $a \leq b$, a é um minorante de $\{a, b\}$. Além disso, se x é um minorante de $\{a, b\}$, tem-se, em particular, $x \leq a$ e, portanto, a é o maior dos minorantes de $\{a, b\}$. Logo $\inf(\{a, b\}) = a$.

(3) ⇒ (2) Se $\inf(\{a, b\}) = a$, então a é um minorante de $\{a, b\}$ e, por conseguinte, $a \leq b$. Logo as três proposições são equivalentes. □

Seguidamente estudam-se alguns processos de construção de novos c.p.o.'s a partir de c.p.o.'s dados.

Se $(A, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado e X é um subconjunto não vazio de A, a relação $\leq_{|X}$ definida, para quaisquer $a, b \in X$, por

$$a \leq_{|X} b \text{ se e só se } a \leq b$$

é uma relação de ordem parcial em X. A relação $\leq_{|X}$ designa-se por ***ordem parcial induzida por*** $\leq$ em X.

Sendo $(A, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado, define-se a partir da relação $\leq$ uma outra relação de ordem parcial em A. A relação $\leq_d$ definida em A por

$$a \leq_d b \text{ se e só se } b \leq a$$

é também uma relação de ordem parcial em A. A relação $\leq_d$ designa-se por ***relação de ordem dual de*** $\leq$ e o conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq_d)$ designa-se por ***conjunto parcialmente ordenado dual de*** $(A, \leq)$. É simples perceber que $(\leq_d)_d = \leq$ e que o c.p.o.

dual de $(A, \leq_d)$ é $(A, \leq)$. Os c.p.o.s $(A, \leq)$ e $(A, \leq_d)$ dizem-se ***conjuntos parcialmente ordenados duais***.

Se Φ é uma afirmação sobre conjuntos parcialmente ordenados, a afirmação Φ_d, obtida de Φ substituindo toda a ocorrência de $\leq$ por $\leq_d$, designa-se por ***afirmação dual de*** Φ. Note-se que se Φ é uma afirmação verdadeira em $(A, \leq)$, então Φ_d é verdadeira em $(A, \leq_d)$, pelo que é válido o seguinte princípio.

Princípio de dualidade para c.p.o.'s Uma afirmação é verdadeira em qualquer conjunto parcialmente ordenado se e só se o mesmo acontece com a respetiva afirmação dual.

Observe-se que os conceitos de majorante, supremo, elemento máximo, elemento maximal são duais dos conceitos de minorante, ínfimo, elemento mínimo, elemento minimal, respetivamente. Assim, se Φ é uma afirmação sobre c.p.o.s envolvendo algum destes conceitos, a afirmação Φ_d é obtida substituindo cada um destes conceitos pelo conceito dual e substituindo toda a ocorrência de $\leq$ por $\leq_d$.

5.3.2 Homomorfismos

No estudo de aplicações entre conjuntos parcialmente ordenados têm particular interesse aquelas que preservam a ordem.

Definição 5.17. *Sejam $(A_1, \leq_1)$ e $(A_2, \leq_2)$ dois conjuntos parcialmente ordenados e $\alpha : A_1 \to A_2$ uma aplicação. Diz-se que:*

- *a aplicação α é **isótona** ou que é um **homomorfismo** (alternativamente, também se diz que α **preserva a ordem**) se, para quaisquer $a, b \in A_1$,*

$$a \leq_1 b \Rightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b).$$

- *a aplicação α é **antítona** se, para quaisquer $a, b \in A_1$,*

$$a \leq_1 b \Rightarrow \alpha(b) \leq_2 \alpha(a).$$

- *α é um **mergulho de ordem** se, para quaisquer $a, b \in A_1$,*

$$a \leq_1 b \Leftrightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b).$$

- *α é um **isomorfismo de c.p.o.s** se α é um mergulho de ordem e é uma aplicação sobrejetiva.*

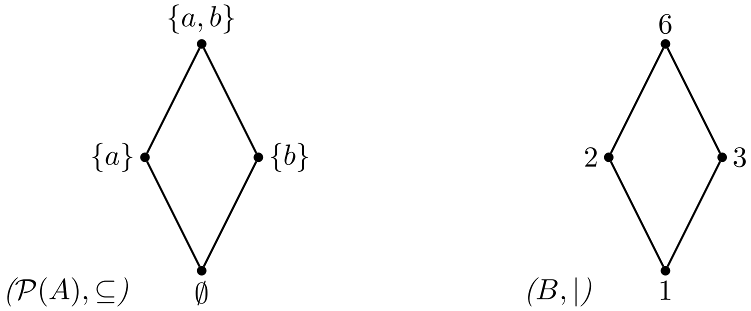
Caso exista um isomorfismo de c.p.o.s de $(A_1, \leq_1)$ em $(A_2, \leq_2)$, diz-se que o c.p.o. $(A_1, \leq_1)$ é isomorfo ao c.p.o. $(A_2, \leq_2)$.

Exemplo 5.19. *(1) Seja $\mathcal{P}_F(\mathbb{N})$ a família dos subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Então $(\mathcal{P}_F(\mathbb{N}), \subseteq)$ é um c.p.o.. Consideremos, também, o c.p.o. $(\mathbb{N}_0, \leq)$. Seja $s : \mathcal{P}_F(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}_0$ a aplicação definida por $s(X) = |X|$, para todo $X \in \mathcal{P}_F(\mathbb{N})$ (por $|X|$ representa-se o número de elementos de X). A aplicação s é um homomorfismo de c.p.o.'s. Esta aplicação não é, no entanto, um isomorfismo de c.p.o.'s, pois não é bijetiva.*

(2) Sejam $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3, 6\}$ e $|$ a relação de ordem definida em B por

$$x \,|\, y \text{ se e só se } \exists_{k \in \mathbb{N}}\ y = kx.$$

Claramente, os conjuntos parcialmente ordenados $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ e $(B, |)$, representados pelos diagramas de Hasse seguintes, são isomorfos.



Fica ao cuidado do leitor a verificação de que a aplicação $f : B \to \mathcal{P}(A)$, definida por $f(1) = \emptyset$, $f(2) = \{a\}$, $f(3) = \{b\}$ e $f(6) = \{a, b\}$, é um isomorfismo de c.p.o.'s.

Um isomorfismo de c.p.o.s é uma aplicação bijetiva. Assim, se α é um isomorfismo de um c.p.o. $(A_1, \leq_1)$ num c.p.o. $(A_2, \leq_2)$, então $\alpha^{-1} : A_2 \to A_1$ também é um isomorfismo de $(A_2, \leq_2)$ em $(A_1, \leq_1)$. Caso exista um isomorfismo entre os c.p.o.s $(A_1, \leq_1)$ e $(A_2, \leq_2)$ diz-se que os c.p.o.s são ***isomorfos*** e escreve-se $(P_1, \leq_1) \cong (P_2, \leq_2)$.

Note-se que, embora um isomorfismo de c.p.o.s seja uma aplicação isótona e bijetiva, uma aplicação bijetiva e isótona não é necessariamente um isomorfismo de c.p.o.s. Por exemplo, sendo $(A_1, \leq_1)$ e $(A_2, \leq_2)$ os c.p.o.s com os diagramas de Hasse a seguir apresentados

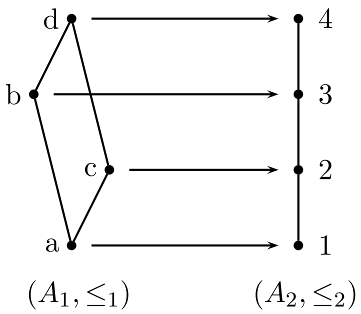


Figura 5.1

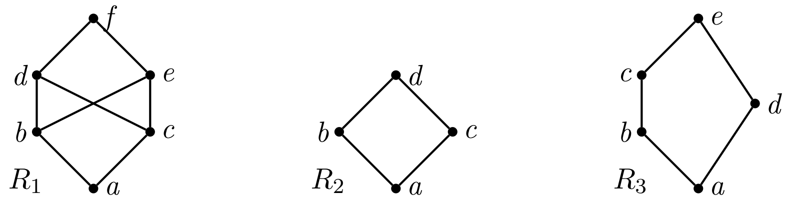
a aplicação α de A_1 em A_2 definida por $\alpha(a) = 1$, $\alpha(b) = 3$, $\alpha(c) = 2$ e $\alpha(d) = 4$ é isótona e bijetiva, mas não é um isomorfismo de c.p.o.s.

5.3.3 Reticulados, cadeias, conjuntos bem ordenados

Nesta secção referem-se algumas classes especiais de conjuntos parcialmente ordenados.

Definição 5.18. *Um conjunto parcialmente ordenado* $(A, \leq)$ *diz-se um* **reticulado** *se, para quaisquer* $x, y \in A$*, existem o supremo e o ínfimo do conjunto* $\{x, y\}$*.*

Exemplo 5.20. *(1) Dos c.p.o.'s a seguir representados são reticulados os c.p.o.'s* R_2 *e* R_3*;* R_1 *não é reticulado, pois, por exemplo, não existe supremo de* $\{b, c\}$*.*



(2) Dado um conjunto A*, o c.p.o.* $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ *é um reticulado.*

(3) O c.p.o. $(\mathbb{N}, |)$ *é um reticulado.*

Definição 5.19. *Seja* $(A, \leq)$ *um conjunto parcialmente ordenado. A ordem parcial* $\leq$ *diz-se uma* **ordem total** *ou* **ordem linear** *se quaisquer elementos* a *e* b *de* A *são comparáveis. Neste caso,* $(A, \leq)$ *diz-se uma* **cadeia** *ou um* **conjunto totalmente ordenado***. Um subconjunto* X *de* A *diz-se uma* **cadeia em** $(A, \leq)$ *ou um* **subconjunto totalmente ordenado de** $(A, \leq)$ *se, para quaisquer* $x, y \in X$*,* x *e* y *são comparáveis.*

Exemplo 5.21.

(1) $\{3, 6, 12\}$ *e* $\{2, 4\}$ *são cadeias em* $(\{1, 2, 3, 4, 6, 10, 12\}, |)$*, mas este c.p.o. não é uma cadeia, pois* 4 *e* 10 *não são comparáveis.*

(2) $(\mathbb{N}, \leq)$*,* $(\mathbb{R}, \leq)$*,* $(\mathbb{Z}, \leq)$ *são cadeias.*

Proposição 5.20. *Se* $(A, \leq)$ *é uma cadeia, então* $(A, \leq)$ *é um reticulado.*

Demonstração. Se $(A, \leq)$ é uma cadeia, então, para quaiquer $a, b \in A$, tem-se $a \leq b$ ou $b \leq a$. Caso $a \leq b$ segue que $\sup(\{a, b\}) = b$ e $\inf(\{a, b\}) = a$; caso $b \leq a$, então $\sup(\{a, b\}) = a$ e $\inf(\{a, b\}) = b$. Assim, para quaisquer $a, b \in A$, existem $\sup(\{a, b\})$ e $\inf(\{a, b\})$ e, portanto, $(A, \leq)$ é um reticulado. □

Conjuntos parcialmente ordenados nos quais toda a cadeia admita um majorante têm garantidamente um elemento maximal. Este resultado, conhecido por Lema de Zorn, é fundamental no estudo de conjuntos parcialmente ordenados e tem aplicações nas mais diversas áreas, tais como Álgebra Linear, Álgebra Universal e Análise.

Teorema 5.21 (Lema de Zorn)**.** *Seja $(A, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado no qual qualquer cadeia admite um majorante. Então, A tem um elemento maximal.*

O Lema de Zorn, equivalente ao Axioma da Escolha, é geralmente utilizado para estabelecer a existência de um objeto que não pode ser construído diretamente (como, por exemplo, uma base num espaço vetorial não trivial ou um ideal maximal num anel).

Definição 5.22. *Seja $(A, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Diz-se que $\leq$ é uma* **boa ordem em** *A se cada subconjunto não vazio de A tem elemento mínimo. Neste caso, diz-se que $(A, \leq)$ é um* **conjunto bem ordenado** *(c.b.o.).*

Exemplo 5.22. *Todo o conjunto totalmente ordenado finito é um conjunto bem ordenado.*

Proposição 5.23. *Se $(A, \leq)$ é um conjunto bem ordenado, então $(A, \leq)$ é uma cadeia.*

Demonstração. Sejam $(A, \leq)$ um conjunto bem ordenado e $a, b \in A$. Uma vez que $(A, \leq)$ é um conjunto bem ordenado, o subconjunto $\{a, b\}$ tem elemento mínimo; então $\min\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\} = a$ e tem-se $a \leq b$, ou $\min\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\} = b$ e tem-se $b \leq a$. Assim, quaisquer dois elementos de A são comparáveis e, portanto, $(A, \leq)$ é uma cadeia.□ □

Embora todo o conjunto bem ordenado seja uma cadeia, existem cadeias que não são conjuntos bem ordenados.

Exemplo 5.23. $(\mathbb{R}, \leq)$ *é uma cadeia, mas não é um conjunto bem ordenado; de facto, $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e não tem elemento mínimo.*

Proposição 5.24. *Um conjunto totalmente ordenado é bem ordenado se e só se não contém qualquer cadeia descendente infinita*

$$x_1 > x_2 > \ldots > x_n > \ldots .$$

Demonstração. A prova que se apresenta seguidamente é uma prova informal; uma prova formal deste resultado requer a aplicação do Axioma da Escolha e poderá ser consultada em bibliografia adequada.

Se $(P, \leq)$ é um conjunto totalmente ordenado que contém uma cadeia descendente infinita

$$x_1 > x_2 > \ldots > x_n > \ldots,$$

então $(P, \leq)$ não é bem ordenado.

Reciprocamente, suponhamos que $(P, \leq)$ é um conjunto totalmente ordenado que não contém qualquer cadeia descendente infinita. Pretendemos mostrar que se A é um subconjunto não vazio de P, então A tem elemento mínimo. Uma vez que $A \neq \emptyset$, existe $a_1 \in A$. Se a_1 é o elemento mínimo de A, a prova está completa. Caso a_1 não seja um elemento mínimo, então existe $a_2 \in A$ tal que $a_1 \nleq a_2$. Uma vez que a ordem é total, segue que $a_2 < a_1$. Se a_2 é o elemento mínimo de A, a prova termina. Caso contrário, existe $a_3 \in A$ tal que $a_2 \nleq a_3$, donde $a_3 < a_2$. Ora, uma vez que $(P, \leq)$ não tem cadeias descentes infinitas, este processo termina num número finito de passos, digamos $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n$. Logo a_n é o elemento mínimo de A. □

Corolário 5.25. *(**Princípio da Boa Ordenação de** $\mathbb{N}$) O conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{N}, \leq)$ é bem ordenado.*