relações binárias

definições básicas

Definição. Dados os conjuntos A e B, não necessariamente distintos, chama-se *relação binária de A em B* a qualquer subconjunto R do produto cartesiano $A \times B$.

Se $A = B$, R diz-se uma relação binária em A.

Se $(a, b) \in R$, diz-se que *a está R relacionado com b* e escreve-se

$$a \ R \ b.$$

Definição. Duas relações binárias R e R' de A em B dizem-se *iguais* se os subconjuntos R e R' de $A \times B$ são iguais.

Exemplos.

1. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$. Então, $R = \{(1, a), (1, b), (2, b), (3, d)\}$ é uma relação binária de A em B.O conjunto $S = \{(1, a), (2, b), (2, e)\}$ não é uma relação binária de A em B pois $S \not\subseteq A \times B$, já que $(2, e) \in S$ e $(2, e) \notin A \times B$.

2. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 4, 8, 9\}$ e $R = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$ é uma relação binária de A em B que pode ser definida por

$$a \; R \; b \Leftrightarrow b = a^2 \qquad\qquad (a \in A, b \in B).$$

3. Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Então $A \times B$ e $\emptyset$ são relações binárias de A em B.

4. Seja A um conjunto qualquer. Então,

$$\mathrm{id}_A = \{(x, x) : x \in A\} \text{ e } \omega_A = A^2 = \{(x, y) : x, y \in A\}$$

   são relações binárias em A. A id_A chamamos *relação identidade em* A e a ω_A chamamos *relação universal em* A.

5. A relação binária R definida em $\mathbb{N}$ por

$$m \; R \; n \Leftrightarrow m \text{ é divisor de } n$$

   é o conjunto

$$R = \{(m, n) : \exists k \in \mathbb{N} : n = mk\}.$$

Definição. Se R é uma relação binária de A em B chama-se:

1. *domínio de R* ao conjunto

$$D_R = \{x \in A : (x, y) \in R \text{ para algum } y \in B\};$$

2. *contradomínio de R* ao conjunto

$$D'_R = \{y \in B : \ \exists x \in A : \ (x, y) \in R\}.$$

Exemplos.

1. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. O conjunto $R = \{(1, 2), (1, 6), (2, 2), (3, 5), (3, 6)\}$ é uma relação binária de A em B tal que $D_R = \{1, 2, 3\}$ e $D'_R = \{2, 5, 6\}$.

2. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$. Seja R a relação binária de A em B definida por

$$x \; R \; y \Leftrightarrow y = x^2 \text{ ou } y = 5x.$$

Então, $D_R = \{2, 4\}$ e $D'_R = \{4, 10, 16, 20\}$.

3. O conjunto $\mathbb{N}$ é o domínio e o contradomínio da relação R definida em $\mathbb{N}$ por

$$m \; R \; n \Leftrightarrow m \text{ é divisor de } n.$$

Observação. Se $R = R'$ então $D_R = D_{R'}$ e $D'_R = D'_{R'}$. O recíproco não é necessariamente verdadeiro. Os domínios e os contradomínios de duas relações binárias podem ser iguais e as relações não serem a mesma.

Exemplo. Sejam $R = \{(1,2),(1,3),(2,2),(3,2)\}$ e $R' = \{(1,3),(2,2),(3,3)\}$ duas relações de $A = \{1,2,3,4\}$ em $B = \{2,3,4,5\}$. Então,

$$D_R = \{1,2,3\} = D_{R'} \text{ e } D'_R = \{2,3\} = D'_{R'}.$$

No entanto, $R \neq R'$.

Definição. Se R é uma relação binária de A em B, chama-se *relação binária inversa de* R, e representa-se por R^{-1}, ao subconjunto de $B \times A$ definido por

$$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A : (x, y) \in R\}.$$

Exemplos.

1. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 5, 7, 9\}$ e $R = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (4, 7), (3, 3)\} \subseteq A \times B$. Então,

$$R^{-1} = \{(3, 1), (5, 1), (3, 2), (7, 4), (3, 3)\}.$$

2. Seja R a relação binária definida em $\mathbb{R}$ por

$$x \ R \ y \Leftrightarrow y = x^2.$$

Então, R^{-1} é a relação binária definida em $\mathbb{R}$ por

$$x \ R^{-1} \ y \Leftrightarrow x = y^2.$$

3. Se R é a relação binária definida em $\mathbb{N}$ por

$$m \ R \ n \Leftrightarrow m \text{ é divisor de } n,$$

então, R^{-1} é a relação binária em $\mathbb{N}$ definida por

$$m \ R^{-1} \ n \Leftrightarrow m \text{ é múltiplo de } n.$$

Sejam A e B dois conjuntos quaisquer e R e S relações binárias de A em B. Então,

1. Se $R \subseteq S$ então $R^{-1} \subseteq S^{-1}$.
2. $(R^{-1})^{-1} = R$.
3. $D_{R^{-1}} = D'_R$ e $D'_{R^{-1}} = D_R$.

Demonstração.

1. Sabendo que $R \subseteq S$ queremos provar que $R^{-1} \subseteq S^{-1}$, i.e., que $x\ R^{-1}\ y \Longrightarrow x\ S^{-1}\ y$. De facto,

$$\begin{aligned} x\ R^{-1}\ y &\Longrightarrow y\ R\ x && \text{(por def. de } R^{-1}\text{)} \\ &\Longrightarrow y\ S\ x && \text{(porque } R \subseteq S\text{)} \\ &\Longrightarrow x\ S^{-1}\ y. && \text{(por def. de } S^{-1}\text{)} \end{aligned}$$

2. Sejam $x, y \in A$. Então,

$$x \ (R^{-1})^{-1} \ y \Leftrightarrow y \ R^{-1} \ x \Leftrightarrow x \ R \ y,$$

pelo que $(R^{-1})^{-1} = R$.

3. A primeira igualdade resulta de termos que

$$\begin{aligned} x \in D_{R^{-1}} & \Leftrightarrow x \in B \wedge (\exists y \in A) : (x, y) \in R^{-1} \\ & \Leftrightarrow x \in B \wedge (\exists y \in A) : (y, x) \in R \\ & \Leftrightarrow x \in D'_R. \end{aligned}$$

A segunda igualdade resulta da primeira por 2.

composição de relações binárias

Definição. Sejam R uma relação binária de A em B e S uma relação binária de C em D. Chama-se *relação binária composta de R com S*, e representa-se por $S \circ R$, à relação binária de A em D definida por

$$x \; S \circ R \; y \Leftrightarrow \exists z \in B \cap C : x \; R \; z \text{ e } z \; S \; y.$$

Observação. Se $B \cap C = \emptyset$ então $S \circ R = \emptyset$

Exemplos:

1. Sejam

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad B = \{4, 5, 6\},$$

$$C = \{1, 2, 7\}, \qquad D = \{4, 5, 6, 7, 8\},$$

$$R = \{(1, 4), (2, 4), (2, 5), (3, 5), (4, 6)\} \subseteq A \times B$$

e

$$S = \{(1, 4), (1, 5), (2, 5), (2, 8), (7, 8)\} \subseteq C \times D$$

Então, como $B \cap C = \emptyset$, temos que $S \circ R = \emptyset$.

2. Sejam

$$A = \{1, 2, 3, 4\},\ B = \{4, 5, 6\},\ C = \{5, 6, 7\},\ D = \{4, 5, 6, 7, 8\},$$

$$R = \{(1, 4), (2, 4), (2, 5), (3, 5), (4, 6)\} \subseteq A \times B,$$

$$S = \{(5, 4), (5, 5), (6, 5), (7, 8), (6, 8)\} \subseteq C \times D$$

Então, $S \circ R = \{(2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (4, 8)\}$.

De facto, temos $B \cap C = \{5, 6\}$ e

$(2, 5) \in R \wedge (5, 4) \in S \Rightarrow (2, 4) \in S \circ R$

$(2, 5) \in R \wedge (5, 5) \in S \Rightarrow (2, 5) \in S \circ R$

$(3, 5) \in R \wedge (5, 4) \in S \Rightarrow (3, 4) \in S \circ R$

$(3, 5) \in R \wedge (5, 5) \in S \Rightarrow (3, 5) \in S \circ R$

$(4, 6) \in R \wedge (6, 5) \in S \Rightarrow (4, 5) \in S \circ R$

$(4, 6) \in R \wedge (6, 8) \in S \Rightarrow (4, 8) \in S \circ R$

3. Se R e S são as relações binárias definidas em $\mathbb{N}$ por

$$n \ R \ m \Leftrightarrow n \text{ é divisor de } m,$$

e

$$n \ S \ m \Leftrightarrow n = m^2,$$

respetivamente, então,

$$\begin{aligned} n \ (S \circ R) \ m \quad & \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N} : n \ R \ p \wedge p \ S \ m \\ & \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N} : n \text{ é divisor de } p \wedge p = m^2 \\ & \Leftrightarrow n \text{ é divisor de } m^2 \end{aligned}$$

Sejam A, B, C, D, E e F conjuntos, $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq C \times D$ e $T \subseteq E \times F$. Então,

1. $D_{S \circ R} \subseteq D_R$ e $D'_{S \circ R} \subseteq D'_S$.
2. No geral, $S \circ R \neq R \circ S$.
3. $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.
4. $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

Demonstração.

1.

$$\begin{aligned} x \in D_{S \circ R} &\Rightarrow \exists y \in D : \ (x, y) \in S \circ R \\ &\Rightarrow \exists y \in D : \exists z \in B \cap C : \ (x, z) \in R \wedge (z, y) \in S \\ &\Rightarrow \exists z \in: \ (x, z) \in R \\ &\Rightarrow x \in D_R \end{aligned}$$

pelo que $D_{S \circ R} \subseteq D_R$. A outra inclusão prova-se de modo análogo.

2. Contraexemplo para $S \circ R = R \circ S$: Sejam $A = \{1, 2\}$ um conjunto e $R = \{(1, 1)\}, S = \{(1, 2)\} \subseteq A \times A$. Então,

$$S \circ R = \{(1, 2)\} \neq \emptyset = R \circ S.$$

3. $x \; T \circ (S \circ R) \; y$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \exists z \in D \cap E : \; x \; (S \circ R) \; z \wedge z \; T \; y \\
&\Leftrightarrow \exists z \in D \cap E : \exists w \in B \cap C : (x \; R \; w \wedge w \; S \; z) \wedge z \; T \; y \\
&\Leftrightarrow \exists z \in D \cap E : \exists w \in B \cap C : x \; R \; w \wedge (w \; S \; z \wedge z \; T \; y) \\
&\Leftrightarrow \exists w \in B \cap C : x \; R \; w \wedge (w \; T \circ S \; y) \\
&\Leftrightarrow x \; (T \circ S) \circ R \; y
\end{aligned}$$

pelo que $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.

4.

$$
\begin{aligned}
x\ (S \circ R)^{-1}\ y \quad & \Leftrightarrow y\ (S \circ R)\ x \\
& \Leftrightarrow \exists z \in B \cap C:\ (y, z) \in R \wedge (z, x) \in S \\
& \Leftrightarrow \exists z \in B \cap C:\ (z, y) \in R^{-1} \wedge (x, z) \in S^{-1} \\
& \Leftrightarrow x\ R^{-1} \circ S^{-1}\ y
\end{aligned}
$$

pelo que $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

imagem de um conjunto por uma relação binária

Definição. Sejam A e B conjuntos, R uma relação binária de A em B e $X \subseteq A$. Chama-se *imagem de X por R* ao conjunto

$$R(X) = \{b \in B : \exists a \in X : \ (a, b) \in R\}.$$

Observação. Se R é uma relação de A em B, como $A \subseteq A$, podemos falar na imagem de A por R, $R(A)$. Facilmente se conclui que $R(A) = D'_R$.

Exemplo. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7, 8\}$ e $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 5), (4, 5), (4, 7)\} \subseteq A \times B$. Se $X = \{1, 5\}$, temos que $R(X) = \{1, 3\}$.

imagem completa inversa de um conjunto por uma relação binária

Definição. Sejam A e B conjuntos, R uma relação binária de A em B e $Y \subseteq B$. Chama-se *imagem completa inversa de Y por R* ao conjunto

$$R^{\leftarrow}(Y) = \{a \in A : \exists b \in Y : \ (a, b) \in R\}.$$

Observação. Se R é uma relação de A em B, como $B \subseteq B$, podemos falar na imagem completa inversa de B por R, $R^{\leftarrow}(B)$. Facilmente se conclui que $R^{\leftarrow}(B) = D_R$.

Exemplo. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7, 8\}$ e $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 5), (4, 5), (4, 7)\} \subseteq A \times B$. Se $Y = \{1, 5, 8\}$, temos que $R^{\leftarrow}(Y) = \{1, 2, 4\}$.