Relações binárias

Definições básicas

Dados conjuntos A e B, uma **relação binária** R de A para B é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.

Habitualmente,
em vez de escrever $(a,b) \in R$, escrevemos $a\,R\,b$,
e, em vez de $(a,b) \notin R$, escrevemos $a \not R\, b$.

Ex.:
Sejam P_1 o conjunto de todas as pessoas e P_2 o conjunto dos países do mundo. Podemos definir a relação N (de "naturalidade") como

$N = \{(x,y) \in P_1 \times P_2 \mid x \text{ nasceu em } y\}$

Se o João nasceu em Portugal, $(\text{João}, \text{Portugal}) \in N$;
o que podemos escrever como João N Portugal.

No caso de $A = B$, isto é, de $R \subseteq A \times A$, dizemos que R é uma **relação binária em A**.

Exemplo:
$\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x < y\}$ é uma relação binária em $\mathbb{N}$,
mais precisamente, a relação "menor que" ($<$) em $\mathbb{N}$.

Outro exemplo:
Qualquer que seja o conjunto A, podemos definir a relação de igualdade ($=$) em A (também chamada identidade em A) como
$\{(x, x) \mid x \in A\}$

[Nota: Também se definem **relações ternárias**, como subconjuntos de produtos cartesianos $A \times B \times C$.
Mais geralmente, uma **relação de aridade *n*** é um subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.]

O conjunto de todas as relações binárias de A para B é o conjunto $\mathcal{P}(A \times B)$.

$\emptyset$ é a **relação vazia**.

$A \times B$ é a **relação universal** de A para B.

Seja R uma relação de A para B.

1. O **domínio** de R é o conjunto
   $\mathrm{Dom}(R) = \{\, a \in A \mid \exists_{b \in B} : (a,b) \in R \,\}$
2. O **contradomínio** de R é o conjunto
   $\mathrm{CDom}(R) = \{\, b \in B \mid \exists_{a \in A} : (a,b) \in R \,\}$

Ex.:
Sejam $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{-1,0,1\}$ e $R = \{(1,1),(2,-1),(2,1),(3,-1)\}$.
Então $\mathrm{Dom}(R) = \{1,2,3\}$ e $\mathrm{CDom}(R) = \{1,-1\}$.

Sejam A, B e C conjuntos, R uma relação de A para B e S uma relação de B para C.

1. A **relação inversa** de R é a relação de B para A
   $R^{-1} = \{(b,a) \mid a\,R\,b\}$.
2. A **composta** de S e R ("S após R") é a relação de A para C
   $S \circ R = \{(a,c) \mid \exists_{b \in B} : (a\,R\,b \wedge b\,S\,c)\}$.

Ex.:

Sejam $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{-1,0,1\}$, $C = \{8,9,10,11\}$,
$R = \{(1,1),(2,-1),(2,1),(3,-1)\}$ e $S = \{(-1,8),(-1,11),(0,9),(1,10)\}$.

Então $R^{-1} = \{(1,1),(-1,2),(1,2),(-1,3)\}$

e $S \circ R = \{(1,10),(2,8),(2,11),(2,10),(3,8),(3,11)\}$

Algumas propriedades

Sejam R uma relação de A para B, S uma relação de B para C e T uma relação de C para D. Então

1. $(R^{-1})^{-1} = R$
2. $\mathrm{Dom}(R^{-1}) = \mathrm{CDom}(R)$
3. $\mathrm{CDom}(R^{-1}) = \mathrm{Dom}(R)$
4. $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$
5. $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$

Seja R uma relação binária no conjunto A. Dizemos que

- R é **reflexiva em A** se $\forall_{a \in A}, a\, R\, a$
  [se não houver perigo de confusão, dizemos só **reflexiva**]
- R é **simétrica** se $\forall_{a \in A} \forall_{b \in A} (a\, R\, b \Rightarrow b\, R\, a)$
  [nesse caso, $\forall_{a \in A} \forall_{b \in A} (a\, R\, b \Leftrightarrow b\, R\, a)$]
- R é **anti-simétrica** se $\forall_{a \in A} \forall_{b \in A} \big((a\, R\, b \wedge b\, R\, a) \Rightarrow a = b\big)$
- R é **transitiva** se $\forall_{a \in A} \forall_{b \in A} \forall_{c \in A} \big((a\, R\, b \wedge b\, R\, c) \Rightarrow a\, R\, c\big)$

Exemplo

Consideremos as seguintes relações no conjunto $A = \{1, 2, 3\}$:

$R = \{(1,1), (2,2), (2,3), (3,1)\}$

$S = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

$T = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,3)\}$

$U = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,3)\}$

S e U são reflexivas em A; R e T não.

T é simétrica; R, S e U não são.

R e U são anti-simétricas; S e T não.

U é transitiva; R, S e T não são.

Relações de equivalência

Uma **relação de equivalência** num conjunto A é uma relação binária em A reflexiva, simétrica e transitiva.

Ex.:

- Seja R a relação no conjunto P das pessoas definida por: $a\,R\,b$ se e só se a e b fazem anos no mesmo dia.
- Seja S a relação em $A = \{1, 2, 3\}$ definida por $S = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\}$.
- Seja $\sim$ a relação em $\mathbb{Z}$ definida por: $a \sim b$ se e só se $a - b$ é divisível por 3.

R, S e $\sim$ são relações de equivalência.

Uma **partição** de um conjunto não vazio X é uma família $\mathcal{D}$ de subconjuntos de X ($\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$) tal que

1. $\emptyset \notin \mathcal{D}$;
2. os elementos de $\mathcal{D}$ são disjuntos dois a dois $(\forall_{A \in \mathcal{D}} \forall_{B \in \mathcal{D}}, (A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset))$
3. $\bigcup \mathcal{D} = X$

Ex.:

- $\{\{1,2\},\{3\}\}$ é uma partição de $A = \{1,2,3\}$
- $\{T_0, T_1, T_2\}$ é uma partição de $\mathbb{Z}$, onde
  $T_0 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ é divisível por } 3\}$,
  $T_1 = \{n \in \mathbb{Z} \mid \text{o resto da divisão de } n \text{ por } 3 \text{ é } 1\}$ e
  $T_2 = \{n \in \mathbb{Z} \mid \text{o resto da divisão de } n \text{ por } 3 \text{ é } 2\}$.

Sejam E uma relação de equivalência no conjunto A e $x \in A$.
A **classe de equivalência** de x relativamente a E (ou **classe de equivalência** de x **módulo** E) é o conjunto

$[x]_E = \{y \in A \mid y \, E \, x\}$

Se não houver perigo de confusão, escreveremos $[x]$ em vez de $[x]_E$.

Ex. (usando as relações de equivalência R, S e $\sim$ definidas anteriormente):

- Se o José faz anos no dia 19 de novembro,
  $[\text{José}]_R = \{\text{pessoas que fazem anos no dia 19 de novembro}\}$.
- $[1]_S = \{1, 2\} = [2]_S$; $[3]_S = \{3\}$.
- $[13]_\sim = \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Ao conjunto de todas as classes de equivalência módulo E, que representamos por A/E, chamamos **conjunto quociente** de A por E (ou **conjunto quociente** A **módulo** E):

$A/E = \{[x]_E \mid x \in A\}$

Ex.:

- Para a relação de equivalência S em $A = \{1, 2, 3\}$ definida anteriormente,

  $A/S = \{[1]_S, [3]_S\} = \big\{\{1, 2\}, \{3\}\big\}$
- Para a relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{Z}$ definida anteriormente,

  $\mathbb{Z}/\sim\, = \{T_0, T_1, T_2\}$

  (estes T_0, T_1, T_2 foram também definidos num exemplo atrás).

Seja A um conjunto não vazio.

Qualquer que seja a relação de equivalência E em A,
A/E é uma partição de A.

Qualquer que seja a partição $\mathcal{D}$ de A,
a relação binária E em A definida por:

$x \, E \, y$ se e só se x e y pertencem ao mesmo elemento de $\mathcal{D}$

é uma relação de equivalência e $A/E = \mathcal{D}$.

Logo, definir uma relação de equivalência em A é "o mesmo" que definir uma partição de A.

Relações de ordem (parcial)

Uma **ordem parcial**, ou **relação de ordem parcial**, num conjunto A é uma relação binária em A reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Ex.:

- A relação $\leq$ em $\mathbb{Z}$ é uma ordem parcial [é também uma ordem total].
- A relação $|$ ("divide") em $\mathbb{N}$ definida por
  $a \mid b$ se e só $\exists_{k \in \mathbb{N}} : b = a \times k$
  é uma ordem parcial.
- Sendo X um conjunto qualquer, a relação $\subseteq$ em $\mathcal{P}(X)$ é uma ordem parcial.

Quando R é uma ordem parcial em A, chama-se
conjunto parcialmente ordenado (**c.p.o.**)
ao par (A, R) ou ao conjunto A, munido da relação R.

$(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{N}, |)$, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ são c.p.o.s.

É frequente representar uma ordem parcial pelo símbolo $\leq$, mesmo quando essa ordem parcial não é uma das relações "menor ou igual" habituais (em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$,...).

Ainda mais habitual é, tendo uma qualquer ordem parcial $\leq$, ler $a \leq b$ como "a é menor ou igual a b".

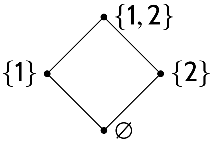
Se R é uma ordem parcial, R^{-1} também é (diz-se que cada uma destas é **dual** da outra).

Assim, por exemplo $(\mathbb{Z}, \geq)$ e $(\mathcal{P}(X), \supseteq)$ são c.p.o.s (duais de $(\mathbb{Z}, \leq)$ e $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, respetivamente).

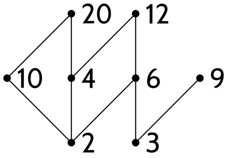
Se A for um conjunto finito, um c.p.o. $(A, \leq)$ pode ser representado por um **diagrama de Hasse**:

1. pontos representando os elementos de A, colocados de forma que, se $a \leq b$ e $a \neq b$, o ponto relativo a a fica mais abaixo do que o relativo a b;
2. linhas ligando elementos consecutivos do c.p.o. (isto é, elementos a, b tais que $a \leq b$ e não existe c tal que $a \leq c \leq b$).

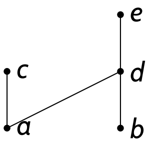
O diagrama de Hasse de $(\mathcal{P}(\{1,2\}), \subseteq)$ é o seguinte:



Outro exemplo:
a relação | ("divide") em $\{2, 3, 4, 6, 9, 10, 12, 20\}$ é uma ordem parcial;
o seu diagrama de Hasse é



Por outro lado, se soubermos que o diagrama de Hasse de $(A, \leq)$ é



podemos concluir que a ordem parcial $\leq$ em A é

$\{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, c), (a, d), (a, e), (b, d), (b, e), (d, e)\}$

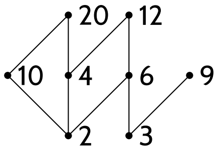
Sejam $(A, \leq)$ um c.p.o., $X \subseteq A$ e $a \in A$; dizemos que

- a é **máximo** de X se $a \in X$ e $\forall_{x \in X}, x \leq a$;
- a é **mínimo** de X se $a \in X$ e $\forall_{x \in X}, a \leq x$;
- a é **majorante** de X se $\forall_{x \in X}, x \leq a$;
- a é **minorante** de X se $\forall_{x \in X}, a \leq x$;
- a é **supremo** de X se a é mínimo do conjunto dos majorantes de X;
- a é **ínfimo** de X se a é máximo do conjunto dos minorantes de X;
- a é **elemento maximal** de X se $a \in X$ e $\sim \exists_{x \in X} : (a \neq x \wedge a \leq x)$;
- a é **elemento minimal** de X se $a \in X$ e $\sim \exists_{x \in X} : (a \neq x \wedge x \leq a)$.

[Máximo e mínimo são conceitos duais: a é máximo de X para uma ordem parcial sse for mínimo para a sua ordem parcial dual; analogamente, majorante e minorante, supremo e ínfimo, elemento maximal e elemento minimal são conceitos duais.]

Exemplo

Seja $A = \{2, 3, 4, 6, 9, 10, 12, 20\}$ e consideremos o c.p.o. $(A, |)$



- 20, 12 e 9 são elementos maximais de A; 2 e 3 são elementos minimais de A; não existem majorantes nem minorantes (nem supremo, ínfimo, máximo ou mínimo) de A.
- Se $X = \{2, 4, 6\}$, 4 e 6 são elementos maximais e 2 é elemento minimal de X; 12 é majorante e 2 é minorante de X; 12 é supremo e 2 é ínfimo de X; 2 é mínimo de X e não existe máximo de X.
- Se $Y = \{2, 4\}$, 4, 20 e 12 são majorantes de Y; 4 é supremo e máximo de Y.

Sejam $(A, \preceq)$ um c.p.o. e $X \subseteq A$.
Caso existam,

- o máximo de X é único;
- o mínimo de X é único;
- o supremo de X é único;
- o ínfimo de X é único.

Notação:
Representa-se por

- $\text{máx}\, X$ o máximo de X;
- $\text{mín}\, X$ o mínimo de X;
- $\sup X$ o supremo de X;
- $\inf X$ o ínfimo de X.

$\text{máx}\, X$ existe se e só se $\sup X$ existe e $\sup X \in X$;
nesse caso, $\text{máx}\, X = \sup X$.
$\text{mín}\, X$ existe se e só se $\inf X$ existe e $\inf X \in X$;
nesse caso, $\text{mín}\, X = \inf X$.

Um **reticulado** é um c.p.o. $(A, \leq)$ tal que, para quaisquer dois elementos a, b de A, existem $\sup\{a, b\}$ e $\inf\{a, b\}$.

Neste caso, é habitual representar $\sup\{a, b\}$ por $a \vee b$ e $\inf\{a, b\}$ por $a \wedge b$.

Ex.:

- $(\mathbb{Z}, \leq)$ é um reticulado.
- Sendo X um conjunto qualquer, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ é um reticulado ($A \vee B = A \cup B$ e $A \wedge B = A \cap B$).
- $(\mathbb{N}, |)$ é um reticulado ($a \vee b = \text{mmc}(a, b)$ e $a \wedge b = \text{mdc}(a, b)$).
- $(\{2, 3, 4, 6, 9, 10, 12, 20\}, |)$ não é um reticulado (p. ex., não existe $6 \vee 9$).

Uma **cadeia**, ou **conjunto totalmente ordenado**, é um c.p.o. $(A, \preceq)$ tal que, para todos os $a, b \in A$, $a \preceq b$ ou $b \preceq a$.
Nesse caso, a ordem parcial $\preceq$ é uma **ordem total**.

Ex.:

- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$,...são cadeias.
- $(\mathbb{N}, \geq)$, $(\mathbb{Z}, \geq)$, $(\mathbb{R}, \geq)$,...são cadeias.

Toda a cadeia é um reticulado
(mas nem todo o reticulado é uma cadeia).

Um **conjunto bem ordenado** é uma cadeia $(A, \leq)$ tal que todo o subconjunto não vazio de A tem mínimo
(este mínimo é habitualmente designado **primeiro elemento**).

- $(\mathbb{N}, \leq)$ é um conjunto bem ordenado.
- $(\mathbb{Z}, \leq)$ não é um conjunto bem ordenado ($\mathbb{Z}^-$ não tem primeiro elemento).