Tópicos de Matemática

Lic. Ciências da Computação

2021/2022

4. Funções

São diversas as situações do dia a dia em que existe a necessidade de associar cada elemento de um determinado conjunto a um único elemento de um outro conjunto. Por exemplo, a cada aluno que realize um teste de Tópicos de Matemática é atribuída uma e uma só classificação pertencente ao conjunto de números reais entre 0 e 20. Este tipo de associação é um exemplo de uma função. A noção de função é essencial na área da matemática e na área das ciências da computação.

4.1 Noções básicas

O conceito de função de um conjunto A num conjunto B é, por vezes, definido como sendo uma correspondência que a cada elemento de A associa um e um só elemento do conjunto B. Esta definição, embora não seja incorreta, não é muito precisa, pois falta definir o que se entende por "correspondência que ... associa ...". Sendo assim, começamos por apresentar uma definição mais precisa do conceito de função.

Definição 4.1. *Sejam A e B conjuntos e $R \subseteq A \times B$. Diz-se que R é uma* **função** *(ou* **aplicação***) de A em B se as duas condições seguintes são satisfeitas:*

(1) para cada $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in R$;

(2) para cada $x \in A$, se $(x, y_1) \in R$ e $(x, y_2) \in R$, com $y_1, y_2 \in B$, então $y_1 = y_2$.

Exemplo 4.1.
(1) Sejam $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Então

$$\rho = \{(a, 8), (b, 7), (c, 6), (d, 8), (e, 9)\}$$

é uma função de A em B, pois, para cada $x \in A$ existe um e um só elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in \rho$.
O conjunto de pares ordenados

$$\theta = \{(a, 6), (b, 5), (c, 8), (d, 6), (e, 9), (a, 7)\}$$

não é uma função de A em B, pois $(a, 6) \in \theta$ e $(a, 7) \in \theta$, mas $6 \neq 7$.

O conjunto

$$\sigma = \{(a,5),(b,6),(d,7),(e,8)\}$$

também não é uma função de A em B, uma vez que $c \in A$, mas não existe $y \in B$ tal que $(c,y) \in \sigma$.

(2) O conjunto $\tau = \{(x,y) \,|\, (x,y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z} \wedge x = |y|\}$ não é uma função de $\mathbb{N}_0$ em $\mathbb{Z}$, uma vez que $(2,2) \in \tau$ e $(2,-2) \in \tau$.

(3) O conjunto $\phi = \{(x,y) \,|\, (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \wedge y = \sqrt{x}\}$ não é uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, uma vez que $-1 \in \mathbb{R}$ e não existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $(-1,y) \in \phi$.

Representamos as funções por letras minúsculas $f, g, h, \ldots, \alpha, \beta, \phi, \ldots$. Dados conjuntos A e B, escrevemos $f : A \to B$ para indicar que f é uma função de A em B. Para cada $a \in A$, o único elemento b de B tal que $(a,b) \in f$ representa-se por $f(a)$; a este elemento dá-se a designação de **imagem de a por f**. Pode, então, escrever-se

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & B \\ & a & \mapsto & f(a) \end{array}$$

Em $f : A \to B$, chamamos:

- **domínio** ou **conjunto de partida** de f ao conjunto A;
- **codomínio** ou **conjunto de chegada** de f ao conjunto B;
- **imagem** ou **contradomínio** de f ao conjunto das imagens por f de todos os elementos de A:
$$\mathrm{Im} f = \{f(x) : x \in A\}.$$

O conjunto de todas as funções de A para B representa-se por B^A. Dado um conjunto A, chama-se **aplicação vazia** à aplicação $\emptyset : \emptyset \to A$; esta é a única aplicação de $\emptyset$ em A e, portanto $A^\emptyset = \{\emptyset\}$. Se A não é vazio não existem aplicações de A em $\emptyset$, pelo que $A^\emptyset = \emptyset$.

Exemplo 4.2. *Sejam $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{1,2,3,4\}$ e f a função de A em B definida por*

$$f = \{(a,2),(b,3),(c,3),(d,4)\}.$$

Então

$$f(a) = 2, f(b) = 3, f(c) = 3 \text{ e } f(d) = 4.$$

A função f pode ser representada por

$$\begin{array}{rcl} f : \{a,b,c,d\} & \to & \{1,2,3,4\} \\ a & \mapsto & 2 \\ b & \mapsto & 3 \\ c & \mapsto & 3 \\ d & \mapsto & 4 \end{array}$$

e tem-se $\mathrm{Im} f = \{2,3,4\}$.

Definição 4.2. *Dados conjuntos A, B, A', B' e funções $f : A \to B$ e $g : A' \to B'$, dizemos que as* **funções** f *e* g **são iguais** *se as duas condições seguintes são satisfeitas:*

(1) $A = A'$, $B = B'$ *e*

(2) para todo $x \in A$, $f(x) = g(x)$.

Exemplo 4.3. *Sejam* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ *e* $k : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ *funções definidas, respetivamente, por*

$$f(x) = \begin{cases} x, & se\ x \geq 0 \\ -x, & se\ x < 0 \end{cases} ; \quad g(x) = |x|, \forall x \in \mathbb{Z}; \quad h(x) = k(x) = |x|, \forall x \in \mathbb{Q}.$$

Tem-se $f = g$, $g \neq h$, $g \neq k$, $h \neq k$.

Definição 4.3. *Sejam* A, B *conjuntos.*

- *Uma função* $f : A \to B$ *diz-se uma* **função constante** *se existe* $b \in B$ *tal que, para todo* $a \in A$, $f(a) = b$.
- *Designa-se por* **função identidade de** A, *e representa-se por* id_A, *a função de* A *em* A *que a cada* $a \in A$ *faz corresponder* a*; i.e.,*

$$\begin{array}{rccc} id_A : & A & \to & A \\ & a & \mapsto & a. \end{array}$$

Exemplo 4.4.

(1) A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *definida por* $f(x) = 2$, *para todo* $x \in \mathbb{Z}$, *é uma função constante.*

(2) Seja $A = \{1, 2, 3\}$. *A função* $f : A \to A$ *definida por* $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ *e* $f(3) = 3$ *é a função* id_A.

Definição 4.4. *Sejam* A, B *conjuntos,* $f : A \to B$ *uma função,* $X \subseteq A$ *e* $Y \subseteq B$. *Designamos por*

- **imagem de** X **por** f *o conjunto* $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$;
- **imagem inversa** *(ou* **pré-imagem)** **de** Y **por** f *o conjunto*

$$f^{\leftarrow}(Y) = \{x \mid x \in A \wedge f(x) \in Y\}.$$

Exemplo 4.5. *Dada a função*

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & |x| \end{array}$$

tem-se:

(1) $f(\{-1,0,1\}) = \{f(-1), f(0), f(1)\} = \{|-1|, |0|, |1|\} = \{0,1\}$;
$f(\mathbb{R}) = \{f(x) \,|\, x \in \mathbb{R}\} = \{|x| \,|\, x \in \mathbb{R}\} = {\mathbb{R}_0}^+$;

(2) $f^{\leftarrow}(\{1\}) = \{x \,|\, x \in \mathbb{R} \wedge f(x) \in \{1\}\} = \{x \,|\, x \in \mathbb{R} \wedge |x| = 1\}\} = \{-1,1\}$;
$f^{\leftarrow}(\mathbb{R}^-) = \{x \,|\, x \in \mathbb{R} \wedge f(x) \in \mathbb{R}^-\} = \{x \,|\, x \in \mathbb{R} \wedge |x| \in \mathbb{R}^-\} = \emptyset$;
$f^{\leftarrow}(\mathbb{R}) = \{x \,|\, x \in \mathbb{R} \wedge f(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \,|\, x \in \mathbb{R} \wedge |x| \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.

Proposição 4.5. *Sejam A, B conjuntos, $f : A \to B$ uma função, $A_1, A_2 \subseteq A$ e $B_1, B_2 \subseteq B$. Então:*

(1) $f(\emptyset) = \emptyset$;

(2) $f(A) \subseteq B$;

(3) *se* $A_1 \subseteq A_2$, *então* $f(A_1) \subseteq f(A_2)$;

(4) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;

(5) $f^{\leftarrow}(\emptyset) = \emptyset$;

(6) $f^{\leftarrow}(B) = A$;

(7) *se* $B_1 \subseteq B_2$, *então* $f^{\leftarrow}(B_1) \subseteq f^{\leftarrow}(B_2)$;

(8) $f^{\leftarrow}(B_1 \cup B_2) = f^{\leftarrow}(B_1) \cup f^{\leftarrow}(B_2)$;

(9) $f^{\leftarrow}(B_1 \cap B_2) = f^{\leftarrow}(B_1) \cap f^{\leftarrow}(B_2)$.

Demonstração. Apresentamos a prova das propriedades (3), (4) e (8). A demonstração das restantes propriedades é deixada como exercício.

(3) Admitamos que $A_1 \subseteq A_2$ e mostremos que $f(A_1) \subseteq f(A_2)$, i.e., mostremos que a proposição

$$\forall_y \ (y \in f(A_1) \to y \in f(A_2))$$

é verdadeira.
Seja $y \in f(A_1)$. Então $y = f(x)$ para algum $x \in A_1$. Mas $A_1 \subseteq A_2$, logo x também é um elemento de A_2. Assim, $y = f(x)$ para algum $x \in A_2$ e, portanto, $y \in f(A_2)$. Provámos, desta forma, que $f(A_1) \subseteq f(A_2)$.

(4) Pretendemos mostrar que $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$. Para tal, comecemos por mostrar que $f(A_1 \cup A_2) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2)$, i.e., mostremos que a proposição

$$\forall_y \ (y \in f(A_1 \cup A_2) \to y \in f(A_1) \cup f(A_2))$$

é uma proposição verdadeira.
De facto, se $y \in f(A_1 \cup A_2)$, então $y = f(x)$, para algum $x \in A_1 \cup A_2$, ou seja, $y = f(x)$, para algum x tal que $x \in A_1$ ou $x \in A_2$. Ora, se $x \in A_1$, tem-se $y \in f(A_1)$. Se $x \in A_2$, tem-se $y \in f(A_2)$. Assim, $y \in f(A_1)$ ou $y \in f(A_2)$ e, portanto, $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$. Provámos, desta forma, que $f(A_1 \cup A_2) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2)$.

Mostremos, agora, que $f(A_1) \cup f(A_2) \subseteq f(A_1 \cup A_2)$, i.e., mostremos que a proposição

$$\forall_y \ (y \in f(A_1) \cup f(A_2) \to y \in f(A_1 \cup A_2))$$

também é verdadeira.
Ora, dado $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$, tem-se que $y \in f(A_1)$ ou $y \in f(A_2)$. Caso $y \in f(A_1)$, tem-se $y = f(x)$, para algum $x \in A_1$. Caso $y \in f(A_2)$, tem-se $y = f(x)$, para algum $x \in A_2$. Assim, $y = f(x)$, para algum objeto x tal que $x \in A_1$ ou $x \in A_2$, i.e., $y = f(x)$ para algum $x \in A_1 \cup A_2$. Portanto, $y \in f(A_1 \cup A_2)$. Logo, $f(A_1) \cup f(A_2) \subseteq f(A_1 \cup A_2)$.

Das duas inclusões que provámos segue que $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

(8) Para todo o objeto x, tem-se

$$\begin{aligned}
x \in f^{\leftarrow}(B_1 \cup B_2) & \Leftrightarrow x \in A \wedge f(x) \in B_1 \cup B_2 \\
& \Leftrightarrow x \in A \wedge (f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2) \\
& \Leftrightarrow (x \in A \wedge f(x) \in B_1) \vee (x \in A \wedge f(x) \in B_2)) \\
& \Leftrightarrow x \in f^{\leftarrow}(B_1) \vee x \in f^{\leftarrow}(B_2) \\
& \Leftrightarrow x \in f^{\leftarrow}(B_1) \cup f^{\leftarrow}(B_2).
\end{aligned}$$

Logo $f^{\leftarrow}(B_1 \cup B_2) = f^{\leftarrow}(B_1) \cup f^{\leftarrow}(B_2)$. □

4.2 Composição de funções

O resultado seguinte estabelece um processo de definir novas funções a partir de funções dadas.

Proposição 4.6. *Sejam A, B, C conjuntos e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções. Então $\{(x, y) \mid (x, y) \in A \times C \ \wedge \ y = g(f(x))\}$ é uma função de A em C.*

Demonstração. Seja $a \in A$. Então, como f é uma função de A em B, existe um único elemento $b \in B$ tal que $f(a) = b$. Agora, uma vez que $b \in B$ e g é uma função de B em C, existe um único elemento $c \in C$ tal que $g(b) = c$. Assim, para cada elemento $a \in A$, existe um único elemento $c \in C$ tal que $g(f(a)) = g(b) = c$. Logo

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in A \times C \ \wedge \ y = g(f(x))\}$$

é uma função de A em C. □

Definição 4.7. *Sejam A, B, C conjuntos e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções. Designa-se por* **função composta de** g **com** f*, e representa-se por $g \circ f$, a função de A em C definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, para cada $x \in A$, ou seja, $g \circ f$ é a função*

$$\begin{array}{rccc} g \circ f : & A & \to & C \\ & x & \mapsto & g(f(x)). \end{array}$$

Exemplo 4.6. *Dadas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ e $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$ definidas por*

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x > 0 \\ -3x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \qquad e \qquad g(x) = -x^2, \text{ para todo } x \in \mathbb{N}_0,$$

podemos considerar as funções $g \circ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ e $f \circ g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ definidas da seguinte forma:

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} -4x^2, & \text{se } x > 0 \\ -9x^2, & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \qquad e \quad (f \circ g)(x) = 3x^2, \text{ para todo } x \in \mathbb{N}_0.$$

Tal como se pode verificar no exemplo anterior, a composição de funções não é, em geral, comutativa. Prova-se, no entanto, ser válida a propriedade associativa para a composição de funções.

Proposição 4.8. *Sejam A, B, C, D conjuntos e $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to D$ funções. Então $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.*

Demonstração. As funções $(h \circ g) \circ f$ e $h \circ (g \circ f)$ têm ambas o mesmo domínio A e o mesmo conjunto de chegada D. Além disso, para todo $x \in A$,

$$\begin{aligned} ((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) \\ &= h(g(f(x))) \\ &= h((g \circ f)(x)) \\ &= (h \circ (g \circ f))(x). \end{aligned}$$

Logo as funções $(h \circ g) \circ f$ e $h \circ (g \circ f)$ são iguais. □

Além da associatividade, prova-se também a propriedade seguinte a respeito da composição de funções.

Proposição 4.9. *Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$ uma função.*
Então $f \circ id_A = f$ e $id_B \circ f = f$.

Demonstração. Apresenta-se a prova da igualdade $f \circ id_A = f$. Claramente, as funções $f \circ id_A$ e f têm o mesmo domínio A e o mesmo conjunto de chegada B. Além disso, para qualquer $x \in A$,

$$(f \circ id_A)(x) = f(id_A(x)) = f(x).$$

Logo $f \circ id_A = f$. A prova da igualdade $id_B \circ f = f$ é análoga. □

4.3 Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas

Nesta secção consideram-se alguns tipos especiais de funções que desempenham um papel relevante na área da matemática, bem como em diversas aplicações das ciências da computação.

Definição 4.10. *Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. Diz-se que a função f é*

- **injetiva** *se*
$$\forall_{a,b\in A} \quad (a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)).$$
- **sobrejetiva** *se*
$$\forall_{b\in B}\ \exists_{a\in A} \quad f(a) = b,$$
- **bijetiva** *se f é injetiva e sobrejetiva, i.e., se*
$$\forall_{b\in B}\ \exists^1_{a\in A} \quad f(a) = b.$$

Observação: Seja $f : A \to B$ uma função.

- A função f é injetiva se e só se elementos de A diferentes têm imagens diferentes. Dito de forma equivalente, a função f é injetiva se e só se, para quaisquer $a, b \in A$,
$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b.$$
- A função f é sobrejetiva se e só se todo o elemento de B é imagem por f de, pelo menos, um elemento de A. Equivalentemente, a função f é sobrejetiva se e só se $f(A) = B$.
- A função f é bijetiva se e só se todo o elemento de B é imagem por f de um e um só elemento de A.

Exemplo 4.7.
(1) A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = 2x$, para todo $x \in \mathbb{Z}$, é injetiva mas não é sobrejetiva.

Facilmente se verifica que f é injetiva. De facto, para todo $x, y \in \mathbb{Z}$,
$$f(x) = f(y) \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow \tfrac{1}{2}(2x) = \tfrac{1}{2}(2y) \Rightarrow x = y.$$
Esta mesma aplicação não é sobrejetiva, pois $1 \in \mathbb{Z}$ e não existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = 1$ (note-se que $1 = f(x)$ sse $x = \frac{1}{2}$, mas $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$).

(2) A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+_0$ definida por $g(x) = x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$, é sobrejetiva mas não é injetiva.

De facto, para todo $y \in \mathbb{R}^+_0$, existe $x = \sqrt{y}$ tal que $x \in \mathbb{R}$ e $g(x) = y$; logo g é sobrejetiva. Porém, esta aplicação não é injetiva, pois 1 e -1 são elementos distintos de $\mathbb{R}$ e $g(1) = g(-1) = 1$.

(3) A função $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = x + 1$, para todo $x \in \mathbb{Z}$, é bijetiva.

Dados $x, y \in \mathbb{Z}$,
$$h(x) = h(y) \Rightarrow x + 1 = y + 1 \Rightarrow (x + 1) - 1 = (y + 1) - 1 \Rightarrow x = y$$
e, portanto, h é injetiva. Além disso, para todo $y \in \mathbb{Z}$, existe $x = y - 1$ tal que $x \in \mathbb{Z}$ e $h(x) = y$; logo h é sobrejetiva. Sendo h injetiva e sobrejetiva, então h é bijetiva.

Apresentam-se seguidamente alguma propriedades a respeito da composição de funções de tipos especiais.

Proposição 4.11. *Sejam A, B, C conjuntos e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções.*

(1) Se f e g são injetivas, então $g \circ f$ é injetiva.

(2) Se f e g são sobrejetivas, então $g \circ f$ é sobrejetiva.

(3) Se f e g são bijetivas, então $g \circ f$ é bijetiva.

Demonstração. (1) Admitamos que f e g são injetivas. Então, para quaisquer $x, y \in A$,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) &\Rightarrow g(f(x)) = g(f(y)) && \text{(definição de } g \circ f\text{)}\\ &\Rightarrow f(x) = f(y) && \text{(g é injetiva)}\\ &\Rightarrow x = y && \text{(f é injetiva).}\end{aligned}$$

Logo $g \circ f$ é injetiva.

(2) Admitamos que f e g são sobrejetivas e mostremos que $g \circ f$ é sobrejetiva.
Uma vez que g é uma função sobrejetiva de B em C, então, para todo $z \in C$, existe $y \in B$ tal que $g(y) = z$. Agora, dado que $y \in B$ e f é uma função sobrejetiva de A em B, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Assim, para todo $z \in C$, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. Logo $g \circ f$ é sobrejetiva.

(3) Resulta de (1) e (2). □

Proposição 4.12. *Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$ e $g : B \to A$ funções. Então:*

(1) Se $g \circ f = id_A$, então f é injetiva.

(2) Se $f \circ g = id_B$, então f é sobrejetiva.

Demonstração. (1) Admitamos que $g \circ f = id_A$. Então, para quaisquer $x, y \in A$, tem-se

$$\begin{aligned}f(x) = f(y) &\Rightarrow g(f(x)) = g(f(y)) && \text{(pois } g \text{ é função)}\\ &\Rightarrow (g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) && \text{(definição de } g \circ f\text{)}\\ &\Rightarrow id_A(x) = id_A(y) && (g \circ f = id_A)\\ &\Rightarrow x = y && \text{(definição de } id_A\text{).}\end{aligned}$$

Logo f é injetiva.

(2) Se $f \circ g = id_B$, então, para todo $b \in B$, tem-se

$$b = id_B(b) = (f \circ g)(b) = f(g(b)).$$

Logo, para todo $b \in B$, existe $a = g(b) \in A$ tal que $f(a) = b$. Portanto, f é sobrejetiva. □

4.4 Funções invertíveis

Uma função f que seja simultaneamente injetiva e sobrejetiva permite a definição de uma nova função, designada por *função inversa* de f.

Teorema 4.13. *Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$ uma função.*
A função f é bijetiva se e só se existe uma única função $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$ e $f \circ g = id_B$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Admitamos que f é uma função bijetiva. Então f é sobrejetiva, pelo que, para cada $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$, isto é, para cada $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $(b, a) \in \{(y, x) \,|\, (y, x) \in B \times A \wedge y = f(x)\}$. Seja g o conjunto $\{(y, x) \,|\, (y, x) \in B \times A \wedge y = f(x)\}$. Para provar que g é uma função, resta mostrar que para cada elemento b de B existe um único elemento a de A tal que $(b, a) \in g$. Ora, se admitirmos que existem $a_1, a_2 \in A$ tais que $(b, a_1) \in g$ e $(b, a_2) \in g$, tem-se, por definição de g, $f(a_1) = b$ e $f(a_2) = b$. Mas f é injetiva, logo $a_1 = a_2$. Assim, para cada elemento b de B, existe um único elemento a de A tal que $(b, a) \in g$. Logo g é uma função.
A prova de $g \circ f = id_A$ e de $f \circ g = id_B$ é simples. Mostramos, apenas, que $g \circ f = id_A$ (sendo análoga a prova de $f \circ g = id_B$). As funções $g \circ f$ e id_A têm ambas domínio A e conjunto de chegada A. Verifica-se, ainda, que, para todo $a \in A$, $(g \circ f)(a) = id_A(a)$. De facto, sendo b o elemento de B tal que $f(a) = b$, tem-se $(b, a) \in g$ e, portanto, $g(b) = a$. Assim, para todo $a \in A$,

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = a = id_A(a).$$

Logo $g \circ f = id_A$.
Mostremos, agora, que a função g é única. Para tal, admitamos que g' é uma função de B em A tal que $g' \circ f = id_A$ e $f \circ g' = id_B$. As funções g e g' têm o mesmo domínio e o mesmo conjunto de chegada. Além disso, para todo $b \in B$,

$$\begin{array}{rclcl} g(b) & = & g(id_B(b)) & = & g((f \circ g')(b)) \\ & = & (g \circ (f \circ g'))(b) & = & ((g \circ f) \circ g')(b) \\ & = & ((id_A) \circ g')(b) & = & g'(b). \end{array}$$

Logo g e g' são iguais.
($\Leftarrow$) Resulta da proposição anterior. $\square$

Definição 4.14. *Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$ uma função bijetiva. À única função $g : B \to A$ tal que $f \circ g = id_B$ e $g \circ f = id_A$ chamamos* **função inversa de** f. *Escrevemos $g = f^{-1}$ e dizemos que f* **é invertível**.

Exemplo 4.8.

(1) Seja A um conjunto. Uma vez que $id_A \circ id_A = id_A$, tem-se $(id_A)^{-1} = id_A$.

(2) Consideremos as funções

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_0^+ & \to & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}_0^+ & \to & \mathbb{R}_0^+. \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Tem-se

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2} = x = id_{\mathbb{R}_0^+}(x),$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x = id_{\mathbb{R}_0^+}(x).$$

Logo f é a inversa de g e g é a inversa de f.

Proposição 4.15. *Sejam A, B, C conjuntos e $f : A \to B$, $g : B \to C$ funções bijetivas. Então:*

(1) $(f^{-1})^{-1} = f$.

(2) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Demonstração. (1) Exercício.

(2) Dado que f e g são funções bijetivas, $g \circ f$ é bijetiva. Logo $g \circ f$ é invertível; sendo a sua inversa uma função de C em A. Uma vez que f^{-1} é uma função de B em A e g^{-1} é uma função C em B, $f^{-1} \circ g^{-1}$ é uma função de C em A. Assim, as funções $(g \circ f)^{-1}$ e $f^{-1} \circ g^{-1}$ têm o mesmo domínio e o mesmo conjunto de chegada. Além disso, para todo $x \in C$,

$$\begin{aligned}
(f^{-1} \circ g^{-1})(x) &= (f^{-1} \circ g^{-1} \circ id_C)(x) \\
&= (f^{-1} \circ g^{-1} \circ (g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1})(x) \\
&= (f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \circ (g \circ f)^{-1})(x) \\
&= (f^{-1} \circ id_B \circ f \circ (g \circ f)^{-1})(x) \\
&= (f^{-1} \circ f \circ (g \circ f)^{-1})(x) \\
&= (id_A \circ (g \circ f)^{-1})(x) \\
&= (g \circ f)^{-1}(x)
\end{aligned}$$

Logo as funções $f^{-1} \circ g^{-1}$ e $(g \circ f)^{-1}$ são iguais. □