conjuntos

Conceitos básicos

Um *conjunto* é uma coleção de objetos.

Os objetos dizem-se *elementos* ou *membros* do conjunto.

Se B é um conjunto, escreve-se $b \in B$ para dizer que "*b é um elemento do conjunto B*". Lê-se "b pertence a B".

Exemplo. Escrevemos $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ porque $\sqrt{2}$ é um número real.

Dois conjuntos A e B dizem-se *iguais* se tem exatamente os mesmos elementos.

Exemplo. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{2, 4, 1, 3, 6, 5\}$.

Existem várias formas de descrever um conjunto:

1. por **extensão** - a descrição é feita listando todos os elementos do conjunto.

Exemplo 1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

O conjunto A é um conjunto com 6 elementos.

Exemplo 2. $B = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$

O conjunto B é um conjunto com 4 elementos.

Exemplo 3. $C = \{1, \{1\}, \sqrt{33}, \clubsuit, \triangle\}$

O conjunto B é um conjunto com 5 elementos.

2. por **compreensão** - a descrição é feita apresentando uma ou mais condições que são satisfeitas pelos elementos e apenas por estes.

Exemplo 1. $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 6\}$

O conjunto A é o conjunto dos números naturais que são menores ou iguais a 6. Temos que $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

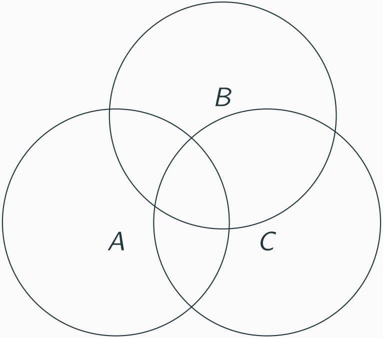
Exemplo 2. $B = \{x : x \text{ é um naipe de cartas}\}$.

O conjunto B é um conjunto com 4 elementos: paus, copas, espadas e ouros.

Exemplo 3. $C = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par}\}$.

O conjunto C é um conjunto com um número infinito de elementos: 2, 4, 6, 8, 10, ...

3. por **Diagrama de Venn** - o conjunto corresponde ao interior de uma curva fechada.



Observações.

1. Dos três modos de descrição de conjuntos, a descrição por diagrama de Venn é a menos formal e a menos precisa.

2. A descrição de um conjunto por extensão é, teoricamente, usada para descrever conjuntos com um número finito de elementos. No entanto, por vezes abusamos da linguagem e escrevemos, por exemplo, $\{2, 4, 6, 8, ...\}$ para representarmos o conjunto dos naturais pares.

Rigorosamente falando, esta descrição pode ser ambígua, pois a leitura que se faz das reticências nem sempre é a mesma - o que não devia acontecer. Se o contexto é claro, esta forma de descrição é aceitável.

Conjunto vazio

Chama-se *conjunto vazio* ou *nulo* ao conjunto sem elementos.
Representa-se por $\emptyset$ ou $\{\ \}$.

Em compreensão, o conjunto vazio pode ser descrito fazendo uso de uma condição impossível.

Exemplo. $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 3\} = \emptyset$.

Observação. Dado um objeto x qualquer, temos que $x \notin \emptyset$ é uma condição universal e que $x \in \emptyset$ é uma condição impossível.

Exemplo. "$x \in \emptyset \Rightarrow x^2 + 3x = 50$" é uma proposição verdadeira.

Subconjuntos

Diz-se que um conjunto A é um *subconjunto* de um conjunto B se todo o elemento de A é também elemento de B.

Escreve-se $A \subseteq B$ e lê-se "A está contido em B" ou "B contém A".

Assim, temos

$$A \subseteq B \Leftrightarrow [x \in A \Rightarrow x \in B] .$$

Exemplo. Se $A = \{2, 4, 6, 8\}$ e $B = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$, podemos afirmar que $A \subseteq B$.

Observação. Basta que um elemento de A não pertença a B para não podermos afirmar que A seja subconjunto de B. Neste caso escrevemos $A \nsubseteq B$.

Exemplo. Se $A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$ e $B = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$, podemos afirmar que $A \nsubseteq B$.

Um subconjunto A de um conjunto B diz-se um *subconjunto próprio* se $A \subseteq B$ e $A \neq B$. Escreve-se $A \subset B$ ou $A \subsetneqq B$.

Propriedades envolvendo a inclusão

1. Qualquer conjunto A é um subconjunto de si mesmo. Diz-se que *A é subconjunto impróprio de A*.

2. Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Então,

$$A \subseteq B \text{ e } B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C \qquad \text{(Transitividade)}$$

3. Sejam A e B conjuntos quaisquer. Então,

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A \qquad \text{(Igualdade)}$$

   Prova-se que 2 conjuntos iguais provando uma dupla inclusão.

4. O conjunto $\emptyset$ é um subconjunto de qualquer conjunto A, pois a proposição

$$x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$$

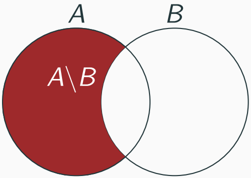
   é verdadeira.

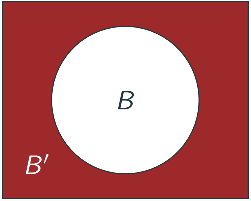
Operações com conjuntos

Complementar de um conjunto

Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Chama-se *complementar relativo de B em A*, e representa-se por $A\backslash B$, ao conjunto $A\backslash B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

Quando todos os conjuntos com que estamos a trabalhar são subconjuntos de um único conjunto (ao qual chamamos *universo*), chama-se *complementar de B*, e representa-se por $\bar{B}$ ou B', ao conjunto $B' = \{x : x \notin B\}$.





Exemplos.

- Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$, então,

$$A \backslash B = \{1, 3, 5\}.$$

- Se $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$, então $\bar{A} = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ ou } x > 1\}$.

- Se A é um conjunto qualquer, $A \backslash \emptyset = A$.

- Se A é um conjunto qualquer, $A \backslash A = \emptyset$.

- Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, então,

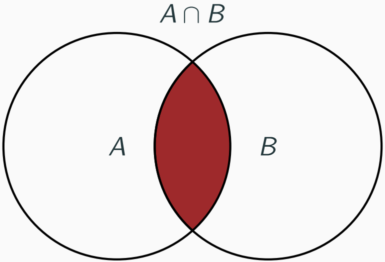
$$A \backslash (B \backslash A) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = A.$$

intersecção de conjuntos

Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Chama-se *intersecção de A e B*, e representa-se por $A \cap B$, ao conjunto

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Se $A \cap B = \emptyset$, os conjuntos A e B dizem-se *disjuntos*.



Exemplos.

- Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, então,

$$A \cap B = \{4, 5, 6\}.$$

- Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$, então,

$$A \cap B = \{2, 4, 6\}.$$

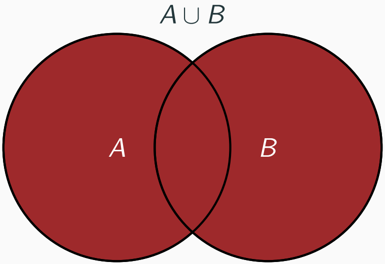
- Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{4, 5, 6\}$, então,

$$A \cap B = \{4, 5, 6\} = B.$$

União de conjuntos

Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Chama-se *união de A e B*, e representa-se por $A \cup B$, ao conjunto

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$



Exemplo. Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$, então,

$$A \cup B = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par } \vee n \leq 5\}.$$

Algumas propriedades que envolvem operações com conjuntos

Sejam A, B e C dois conjuntos quaisquer. Então,

1. $A \cup A = A, \ \ A \cap A = A$;

$$x \in A \cup A \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \Leftrightarrow x \in A$$

e

$$x \in A \cap A \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in A \Leftrightarrow x \in A$$

2. $A \cup \emptyset = A, \ \ A \cap \emptyset = \emptyset$;

$$x \in A \cup \emptyset \Leftrightarrow x \in A \vee x \in \emptyset \Leftrightarrow x \in A$$

e

$$x \in A \cap \emptyset \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \emptyset \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

3. $A \cup B = B \cup A, \;\; A \cap B = B \;\; \cap A;$

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in B \vee x \in A \Leftrightarrow x \in B \cup A$$

e

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in B \wedge x \in A \Leftrightarrow x \in B \cap A$$

4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \;\; A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cup C) \quad & \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cup C \\ & \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \\ & \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \\ & \Leftrightarrow x \in A \cup B \vee x \in C \\ & \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C \end{aligned}$$

De modo análogo, prova-se a segunda igualdade.

5. $A \subseteq A \cup B$;

Queremos provar que $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$.

$$\begin{aligned} x \in A \quad & \Rightarrow x \in A \vee x \in B \qquad\qquad [p \Rightarrow p \vee q] \\ & \Rightarrow x \in A \cup B \end{aligned}$$

6. $A \cup B$ é o menor conjunto que contém simultaneamente A e B;

Sabemos que $A \cup B$ é, por definição, um conjunto. Mais ainda, sabemos que $A \subseteq A \cup B$ e que $B \subseteq A \cup B$.

Falta provar que $A \cup B$ é o menor nestas condições. Seja C um conjunto tal que $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$. Então,

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in C \vee x \in C \Rightarrow x \in C.$$

Provámos que $A \cup B \subseteq C$.

7. $A \cap B$ é o maior conjunto que está contido simultaneamente em A e B;

8. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$;

   Provemos a primeira equivalência: Suponhamos que $A \subseteq B$. Então,

   $$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in B \vee x \in B \Leftrightarrow x \in B,$$

   pelo que $A \cup B \subseteq B$. Pela propriedade 5, podemos concluir que $A \cup B = B$.
   Reciprocamente, suponhamos que $A \cup B = B$. Então,

   $$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in B,$$

   pelo que $A \subseteq B$.

   A equivalência $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$ prova-se de modo análogo.

9. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \; A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

A primeira igualdade resulta de

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) & \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \\ & \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\ & \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\ & \Leftrightarrow (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) \\ & \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

A segunda igualdade prova-se de modo análogo.

10. $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C), \; A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.

A primeira igualdade resulta de

$$\begin{aligned} x \in A \backslash (B \cap C) & \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \cap C \\ & \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \\ & \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \\ & \Leftrightarrow (x \in A \backslash B) \vee (x \in A \backslash C) \\ & \Leftrightarrow x \in A \backslash B \cup A \backslash C) \end{aligned}$$

A segunda igualdade prova-se de modo análogo.

Produto cartesiano de conjuntos

Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Chama-se *produto cartesiano de A por B*, e representa-se por $A \times B$, ao conjunto

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Ao elemento (a, b) chamamos *par ordenado*.

Importante. A ordem na descrição dos pares é fundamental: em geral, $(a, b) \neq (b, a)$.

A igualdade de pares ordenados é definida componente a componente:

$$(a, b) = (x, y) \Leftrightarrow a = x \text{ e } b = y.$$

Notação. Escreve-se A^2 para representar $A \times A$.

Exemplo. Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$, então,

$$A \times B = \{(1,4),(2,4),(3,4),(1,5),(2,5),(3,5)\}$$

e

$$B \times A = \{(4,1),(5,1),(4,2),(5,2),(4,3),(5,3)\}.$$

Temos que $A \times B \neq B \times A$.

Exemplo. Se $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$, então,

$$A \times B = \{(2n, 2m + 1) : n, m \in \mathbb{N}\}.$$

Algumas propriedades

Sejam A, B, C e D conjuntos quaisquer.

1. Se A tem n elementos e B tem m elementos, então, $A \times B$ tem nm elementos.
2. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

   Temos que

$$\begin{aligned} (x, y) \in A \times (B \cup C) & \Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \\ & \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \\ & \Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \vee (x, y) \in A \times C \\ & \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C) \end{aligned}$$

   o que prova que $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

3. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

4. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (A \times B) \cap (C \times D) &\Leftrightarrow (x,y) \in A \times B \wedge (x,y) \in C \times D \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in C \wedge y \in D) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in C) \wedge (y \in B \wedge y \in D) \\
&\Leftrightarrow x \in A \cap C \wedge y \in B \cap D \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in (A \cap B) \times (A \cap C)
\end{aligned}$$

Observação. Em geral, $(A \times B) \cup (C \times D) \neq (A \cup C) \times (B \cup D)$.

Contraexemplo: Basta considerar quatro conjuntos singulares distintos dois a dois.

5. $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$.

Temos que

$$A \times \emptyset = \{(x,y) : x \in A \wedge y \in \emptyset\} = \emptyset,$$

já que $y \in \emptyset$ é uma condição impossível.

De modo análogo, prova-se que $\emptyset \times A = \emptyset$.

Teorema. *Sejam A e B conjuntos. Se $A \times B = B \times A$ então um dos conjuntos A ou B é vazio ou $A = B$.*

Demonstração.

Suponhamos que $A \times B = B \times A$ e que $A \neq \emptyset$ e que $B \neq \emptyset$.

Sejam $x \in A$ e $y \in B$. Então, $(x, y) \in A \times B$ e, portanto, $(x, y) \in B \times A$.

Logo, $x \in B$ e $y \in A$.

Provámos, assim, que $A \subseteq B$ e que $B \subseteq A$, ou seja, provámos que $A = B$.

$\square$

Potência de um conjunto

Seja A um conjunto qualquer. Chama-se *conjunto potência de A* ou *conjunto das partes de A*, e representa-se por $\mathcal{P}(A)$, ao conjunto de todos os subconjuntos de A, i.e.,

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}.$$

Exemplo. Se $A = \{a, b\}$, então,

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}.$$

Exemplo. Se $A = \{a, b, c\}$, então,

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, A\}.$$

Observação. Se A tem n elementos, então, $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos.

Famílias de conjuntos

Seja I um conjunto não vazio (ao qual se chama *conjunto de índices*) tal que, para cada $i \in I$, A_i é um conjunto.

Chama-se *família de conjuntos* A_i (com $i \in I$) ao conjunto cujos elementos são os conjuntos A_i $(i \in I)$. Escreve-se

$$\mathcal{F} = (A_i)_{i \in I} = \{A_i : i \in I\}.$$

Observação. O conjunto dos índices pode ser finito ou infinito . Quando é finito e tem n elementos, é costume escrever-se $I = \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Exemplo. $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ é uma família de conjuntos. De facto, dado um conjunto qualquer A, o conjunto potência de A é uma família de conjuntos.

Exemplo. Para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, seja

$$A_i = \{4n + i : n \in \mathbb{N}\}.$$

Então

$$(A_i)_{i \in \{1,2,3,4\}} = \{\{4n + 1 : n \in \mathbb{N}\}, \{4n + 2 : n \in \mathbb{N}\},$$

$$\{4n + 3 : n \in \mathbb{N}\}, \{4n + 4 : n \in \mathbb{N}\}\}.$$

Exemplo. $\mathcal{F} = \{[x, x + \sqrt{2}] : x \in \mathbb{R}\}$ é uma família de conjuntos.

Exemplo. Sejam $A_1 = \emptyset$ e $A_i = \mathcal{P}(A_{i-1})$ para $i \in \mathbb{N}$ com $i \geq 2$. Então,

$$(A_i)_{i \in \mathbb{N}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots\}.$$

Operações com famílias de conjuntos

Os conceitos de intersecção, união e produto cartesiano de conjuntos podem ser estendidos a uma família de conjuntos:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : (\forall i \in I)\ x \in A_i\}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : (\exists i \in I)\ x \in A_i\}$$

Se $I = \{1, 2, ..., n\}$,

$$\prod_{i \in I} A_i = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) : (\forall i \in I)\ a_i \in A_i\}$$

Propriedades

Dados um conjunto A e uma família de conjuntos $\{B_i\}_{i\in I}$, temos que:

1. $\displaystyle\bigcap_{i\in I} B_i \subseteq B_n$, para todo o $n \in I$;
2. $\displaystyle B_n \subseteq \bigcup_{i\in \mathbb{N}} B_i$, para todo o $n \in I$;
3. $\displaystyle\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) \setminus A = \bigcup_{i\in I} (B_i \setminus A)$;
4. $\displaystyle A \setminus \bigcap_{i\in I} B_i = \bigcup_{i\in I} (A \setminus B_i)$;
5. $\displaystyle A \times \bigcap_{i\in I} B_i = \bigcap_{i\in I} (A \times B_i)$;
6. $\displaystyle A \times \bigcup_{i\in I} B_i = \bigcup_{i\in I} (A \times B_i)$.