Teoria elementar de conjuntos

Definições básicas

Um **conjunto** é uma coleção de objetos, chamados **elementos** desse conjunto;
se a é um elemento do conjunto A, escrevemos
$a \in A$ ("a pertence a A");
e se b não é um elemento do conjunto A, escrevemos
$b \notin A$ ("b não pertence a A");
um conjunto fica completamente determinado pelos seus elementos:
$A = B$ se e só se A e B têm os mesmos elementos.

Quatro conjuntos de números especiais:
$\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$: conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais

A linguagem de conjuntos é frequentemente utilizada para indicar os universos de quantificação, das seguintes formas:

$\forall_{x \in A}\, P(x)$ ou $\forall_{x \in A}, P(x)$

e

$\exists_{x \in A}\, P(x)$ ou $\exists_{x \in A} : P(x)$

Por exemplo:

$\forall_{x \in \mathbb{Z}}\, \exists_{k \in \mathbb{Z}} : x = 1 \times k$

Repare que

$\forall_{x \in A}\, P(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall_x\, (x \in A \rightarrow P(x))$

e

$\exists_{x \in A}\, P(x) \quad \Leftrightarrow \quad \exists_x\, (x \in A \wedge P(x))$

Um conjunto pode ser descrito por **extensão**, apresentando todos os seus elementos (desde que seja finito), como em

$A = \{1, 4, 9\}$
("conjunto formado por 1, 4 e 9")

ou por **compreensão**, apresentando uma propriedade que seja verificada pelos seus elementos e só por eles, como em

$A = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 3\}$ ou $A = \{n^2 : n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 3\}$
("conjunto formado pelos n^2 tais que n é um número natural menor ou igual a 3")

Note-se que $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 3\} = \{1, 4, 9\}$, pois os seus elementos são os mesmos.

O conjunto **vazio**, que se representa por $\{\}$ ou $\varnothing$ é o conjunto que não tem nenhum elemento.

O conjunto vazio pode ser descrito por compreensão, por exemplo da seguinte forma:
$\{x \mid x \neq x\}$

Um conjunto pode ser elemento de outro conjunto.
Por exemplo, o conjunto $A = \big\{\varnothing, 42, \{42, 15\}\big\}$
tem três elementos, dos quais dois ($\varnothing$ e $\{42, 15\}$) são conjuntos e um (42) é um número.

(Note que $15 \notin A$.)

Se todo o elemento dum conjunto A é também elemento dum conjunto B, dizemos que A está **contido** em B, ou que A é **subconjunto** de B e escrevemos
$A \subseteq B$

(nota: $A \subseteq B$ significa $\forall_{x \in A}\, x \in B$, ou $\forall_x\, (x \in A \Rightarrow x \in B)$)

Se $A \subseteq B$ e algum elemento de B não é elemento de A, dizemos que A está **propriamente contido** em B, ou que A é **subconjunto próprio** de B e escrevemos
$A \subset B$ ou $A \subsetneqq B$

Se A não está contido em B, ou seja se algum elemento de A não é elemento de B, escrevemos
$A \not\subseteq B$

Ex.:

- $\{a, c\} \subseteq \{a, b, c\}$
- $\{a, c\} \subsetneqq \{a, b, c\}$
- $\{a, c\} \nsubseteq \{a, b\}$
- $\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R}$

Algumas propriedades.
Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Então

1. $A \subseteq A$;
2. $\emptyset \subseteq A$;
3. se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$; e
4. $A = B$ se e só se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Dado um conjunto A,
o **conjunto potência** de A, ou **conjunto das partes** de A,
que se representa por $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto
$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$

Ex.:
Se $A = \{a, b\}$, então $\mathcal{P}(A) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\big\}$.

Duas propriedades:

1. para qualquer conjunto A, $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ e $A \in \mathcal{P}(A)$;
2. se A for um conjunto finito com n elementos, $\mathcal{P}(A)$ terá 2^n elementos.

Operações sobre conjuntos

Sejam A e B dois subconjuntos de um conjunto X, chamado **universo**.

A **união** (ou **reunião**) de A com B, que se representa por $A \cup B$, é o conjunto

$A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \vee x \in B\}$

A **interseção** de A com B, que se representa por $A \cap B$, é o conjunto

$A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \wedge x \in B\}$

O **complementar** de B em A ("A exceto B"), ou **diferença** entre A e B, que se representa por $A \setminus B$ ou por $A - B$, é o conjunto

$A \setminus B = A - B = \{x \in X \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

$X \setminus B$ chama-se simplesmente o **complementar** de B e também se representa por $\overline{B}$.

Ex.:

Consideremos o universo dos números naturais, $\mathbb{N}$, e sejam

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e

$B = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists_{k \in \mathbb{N}} : n = 2k\}$

então

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, \ldots\} \\ &= B \cup \{1, 3, 5, 7, 9\} \end{aligned}$$

$A \cap B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$A \setminus B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$B \setminus A = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 10 \wedge \exists_{k \in \mathbb{N}} : n = 2k\}$

$\overline{A} = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 10\}$

$\overline{B} = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists_{k \in \mathbb{N}} : n = 2k - 1\}$

Algumas propriedades

Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto X. Então

- $A \subseteq A \cup B$ e $B \subseteq A \cup B$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cup A = A$
- $A \cup X = X$
- $A \cup B = B \cup A$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- se $A \subseteq B$, então $A \cup B = B$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cap B \subseteq A$ e $A \cap B \subseteq B$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap A = A$
- $A \cap X = A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- se $A \subseteq B$, então $A \cap B = A$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- $A \cap \overline{A} = \varnothing$
- $A \setminus \varnothing = A$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{\overline{A}} = A$
- $A \cup \overline{A} = X$
- se $A \subseteq B$, então $A \setminus B = \varnothing$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Se $A \cap B = \varnothing$, dizemos que A e B são **disjuntos**.
(P. ex., A e $\overline{A}$ são disjuntos)

Famílias de conjuntos

Uma **família de conjuntos** é um conjunto cujos elementos são todos conjuntos.

Por exemplo, $\mathcal{F} = \big\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,4\}\big\}$ é uma família de conjuntos.

Dada uma família de conjuntos $\mathcal{F}$, definimos a sua **união** como

$\bigcup \mathcal{F} = \{\, x \mid \exists_{A \in \mathcal{F}} : x \in A \,\}$

e a sua **interseção** como

$\bigcap \mathcal{F} = \{\, x \mid \forall_{A \in \mathcal{F}}, x \in A \,\}$

No exemplo acima,

$\bigcup \mathcal{F} = \{1,2,3,4\}$ e

$\bigcap \mathcal{F} = \{2\}$

É habitual apresentar as famílias de conjuntos através de um conjunto de índices:

$\mathcal{F} = \{A_i \mid i \in I\}$, onde cada A_i é um conjunto

I é um conjunto de índices
(na maior parte das vezes, $I = \mathbb{N}$, $I = \mathbb{N}_0$, $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ ou $I = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$)

Nesse caso, representamos a união e a interseção, respetivamente, por

$$\bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{e} \quad \bigcap_{i \in I} A_i$$

ou (se fizer sentido)

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \text{e} \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Por exemplo, se $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{2, 3\}$ e $A_3 = \{1, 2, 4\}$, a família do exemplo anterior pode ser escrita como

$\big\{A_i \mid i \in \{1, 2, 3\}\big\}$

e escrevemos

$$\bigcup_{i=1}^{3} A_i = \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{e} \quad \bigcap_{i=1}^{3} A_i = \{2\}$$

Outro exemplo: para cada $i \in \mathbb{N}$, seja A_i o conjunto dos números naturais divisores de i;

($A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{1, 2\}$,..., $A_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, ...)

então

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{1\}$$

Produto cartesiano

Dados dois objetos a e b, se apenas quisermos considerá-los juntos tomamos o conjunto $\{a,b\}$ $(= \{b,a\})$; mas, se nos interessar a sua ordem, tomamos o **par ordenado**

(a,b)

(onde a é a **primeira coordenada** e b a **segunda coordenada**)

ou o par ordenado

(b,a)

(onde b é a primeira coordenada e a a segunda coordenada)

- $(a,b) = (u,v)$ se e só se $a = u$ e $b = v$
- se $a \neq b$, $(a,b) \neq (b,a)$

Dados conjuntos A e B, o **produto cartesiano** $A \times B$ é o conjunto

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Ex.:
Sejam $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{2,4\}$;
então
$A \times B = \{(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4)\}$ e
$B \times A = \{(2,1),(2,2),(2,3),(4,1),(4,2),(4,3)\}$

- em geral, $A \times B \neq B \times A$
- se A e B forem finitos, com n e m elementos respetivamente, tanto $A \times B$ como $B \times A$ terão $n \times m$ elementos
- $A \times A$ também se representa por A^2

Analogamente, dados conjuntos A, B e C, o produto cartesiano $A \times B \times C$ é um conjunto de **ternos ordenados**:

$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid (a \in A \wedge b \in B) \wedge c \in C\}$

- $A^3 = A \times A \times A$

Mais geralmente, dados conjuntos A_1, A_2,...A_n, o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ é um conjunto de ***n*** **-úplos ordenados**:

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid \forall_{i \in \{1,2,\ldots,n\}}\, a_i \in A_i\}$

- $A^n = A \times A \times \ldots \times A$ ("*n* vezes")