Tópicos de Matemática

Lic. Ciências da Computação
2021/2022

3. Indução nos Naturais

No capítulo 1. foram apresentados métodos de prova que podem ser aplicados para estabelecer a veracidade de afirmações a respeito de qualquer tópico matemático. Neste capítulo estudamos uma outra técnica de prova, designada por *indução matemática*, e que é indicada para provar propriedades a respeito dos números naturais.

3.1 Princípio de Indução Matemática

Muitas proposições e conjeturas em matemática referem propriedades sobre os números naturais. Considere, por exemplo, o problema de encontrar uma fórmula para a soma dos primeiros n números naturais ímpares. Se calcularmos esta soma para alguns valores de n

$$\begin{array}{lcl} 1 & = & 1 \\ 1+3 & = & 4 \\ 1+3+5 & = & 9 \\ 1+3+5+7 & = & 16 \\ 1+3+5+7+9 & = & 25 \end{array}$$

somos levados a conjeturar que a soma dos n primeiros números naturais ímpares poderá ser dada pela fórmula n^2. Mas será esta fórmula válida para qualquer natural n? Em caso afirmativo, como provar que a conjetura é válida? Obviamente, não podemos confirmar esta conjetura fazendo a sua verificação para cada um dos números naturais, mas, como vamos ver seguidamente, existe um método de prova que permitirá mostrar que a conjetura anterior é, de facto, válida. Tal método de prova, que tem por base o **Princípio de Indução (Simples) para** $\mathbb{N}$, é justificado pela definição indutiva de $\mathbb{N}$ através das regras seguintes

(i) $1 \in \mathbb{N}$;

(ii) se $n \in \mathbb{N}$, então $n+1 \in \mathbb{N}$.

Como se verificará de seguida, a validade do Princípio de Indução (Simples) para $\mathbb{N}$ pode ser estabelecida com base numa importante propriedade dos números naturais, o *Princípio da Boa Ordenação de* $\mathbb{N}$. De acordo com este princípio (que será estudado com mais detalhe no capítulo 6.), todo o subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ tem elemento mínimo (isto é, para todo o subonjunto não vazio S de $\mathbb{N}$, existe $m \in S$ tal que $m \leq s$, para todo $s \in S$).

Teorema 3.1 (Princípio de Indução (Simples) para $\mathbb{N}$)**.** *Seja $p(n)$ um predicado sobre $\mathbb{N}$. Se*

(1) $p(1)$ é verdadeira, e

(2) para todo $k \in \mathbb{N}$, $p(k+1)$ é verdadeira sempre que $p(k)$ é verdadeira,

então $p(n)$ é verdadeira, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Admitamos que as condições (1) e (2) são satisfeitas e mostremos que, para qualquer natural n, $p(n)$ é verdadeira. Para tal, consideremos o conjunto X dos números naturais que não satisfazem $p(n)$, i.e. $X = \{n \in \mathbb{N} : \neg p(n)\}$, e, no sentido de fazer uma prova por redução ao absurdo, admitamos que $X \neq \emptyset$. Então X tem um elemento mínimo, digamos m. Pela condição (1), tem-se $m \neq 1$ e, portanto, $m = k+1$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Sendo m o menor elemento de X, então $k = m-1 \notin X$. Logo $p(k)$ é verdadeira e por (2) segue que $p(k+1)$ é verdadeira, o que contradiz a hipótese de m ser um elemento de X. Logo X tem de ser vazio e, portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ é verdadeira. □

A condição (1) do teorema anterior é chamada de **Base de indução** e a condição (2) de **Passo de indução**. Na aplicação da condição (2) chamamos **Hipótese de indução** a "$p(k)$ é verdadeira".
A aplicação do Princícpio de Indução para $\mathbb{N}$ para provar uma proposição do tipo $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, p(n)$, onde $p(n)$ representa um predicado sobre os naturais, diz-se uma **prova por indução nos naturais**.

Exemplo 3.1. *Consideremos novamente o problema de determinar uma fórmula para a soma soma dos n primeiros números naturais ímpares e mostremos que esta soma é igual n^2, i.e., mostremos que*

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ 1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2.$$

A prova é feita recorrendo ao Princípio de Indução para $\mathbb{N}$. Representemos por $p(n)$ o predicado: "$1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$".

(1) Base de indução ($n = 1$): Uma vez que $1 = 1^2$, é imediato que $p(1)$ é verdadeira.

(2) Passo de indução: Dado $k \in \mathbb{N}$, admitamos, por hipótese de indução, que $p(k)$ é verdadeira, ou seja que

$$1+3+5+\ldots(2k-1) = k^2.$$

Mostremos, com base nesta hipótese, que $p(k+1)$ também é verdadeira, ou seja, que

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2(k+1)-1) = (k+1)^2.$$

De facto, atendendo à hipótese de indução, tem-se:

$$\begin{aligned} 1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2(k+1)-1) &= k^2+(2(k+1)-1) \\ &= k^2+2k+1 \\ &= (k+1)^2. \end{aligned}$$

De (1) e (2) e pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$, concluímos que

$$\forall_{n\in\mathbb{N}},\ 1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$

é uma proposição verdadeira.

Exemplo 3.2. *Mostremos que n^3-n é divisível por 3, para todo o natural $n\in\mathbb{N}$, pelo método de indução nos naturais.*

Representemos por $p(n)$ o predicado "n^3-n é divisível por 3".

(1) Base de indução: Para $n=1$, temos $n^3-n=1^3-1=0$. Como 0 é divisível por 3, $p(1)$ é verdadeira.

(2) Passo de indução: Seja $k\in\mathbb{N}$ tal que $p(k)$ é verdadeira, ou seja, k^3-k é divisível por 3. Então, existe $q\in\mathbb{N}_0$ tal que $k^3-k=3q$. Assim,

$$\begin{aligned}(k+1)^3-(k+1) &= (k^3+3k^2+3k+1)-(k+1)\\ &= k^3+3k^2+3k-k\\ &= (k^3-k)+(3k^2+3k)\\ &= 3q+(3k^2+3k)\\ &= 3(q+k^2+k).\end{aligned}$$

Logo, $(k+1)^3-(k+1)=3(q+k^2+k)$, pelo que $p(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$ e por (1) e (2), podemos concluir que

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \ n^3-n \text{ é divisível por 3.}$$

Exemplo 3.3. *Mostremos, pelo método de indução nos naturais, que, para todo o natural n,*

$$2^{n+4}>2n+9.$$

Representemos por $p(n)$ o predicado "$2^{n+4}>2n+9$".

(1) Base de indução: Para $n=1$, tem-se

$$2^{1+4}=32>11=2\times 1+9$$

e, portanto, $p(1)$ verdadeira.

(2) Passo de indução: Seja $k\in\mathbb{N}$ tal que $p(k)$ é verdadeira, ou seja, tal que

$$2^{k+4}>2k+9.$$

Então

$$\begin{aligned}2^{(k+1)+4} &= 2\times 2^{k+4}\\ &> 2\times(2k+9)\\ &= (2k+9+2)+(2k+7)\\ &> 2k+2+9\\ &= 2(k+1)+9,\end{aligned}$$

donde $2^{(k+1)+4} > 2(k+1) + 9$ *e, portanto,* $p(k+1)$ *é verdadeira.*

Pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$ *e por (1) e (2), podemos concluir que*

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \ \ 2^{n+4} > 2n + 9.$$

Note que é necessário que se verifiquem simultaneamente as condições (1) e (2) do teorema anterior para que se possa invocar o Princípio de Indução.

Exemplo 3.4. *Considerando o predicado* $p(n)$*: "*$n^2 + 5n + 1$ *é par", facilmente se verifica que o passo de indução do Príncipio de Indução é válido quando aplicado a* $p(n)$*. De facto, dado* $k \in \mathbb{N}$*, se admitirmos que* $p(k)$ *é verdadeira, a proposição* $p(k+1)$ *também é verdadeira, pois*

$$(k+1)^2 + 5(k+1) + 1 = (k^2 + 5k + 1) + (2k + 6)$$

e, uma vez que $(k^2 + 5k + 1)$ *e* $(2k + 6)$ *são pares, tem-se que* $(k+1)^2 + 5(k+1) + 1$ *é par. Note-se, porém, que, embora o passo de indução seja válido, a proposição*

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \ \ n^2 + 5n + 1 \text{ é par}$$

não é verdadeira, uma vez que $p(1)$ *é falsa.*

A proposição "$\forall_{n\in\mathbb{N}} \ 3^n > 2^{n+1}$" também não é verdadeira. De facto, representando por $p(n)$ o predicado "$3^n > 2^{n+1}$", é simples verificar que este não é válido para o natural 1. No entanto, prova-se ser válido para todos os naturais maiores ou iguais a 2. A prova deste resultado pode ser feita recorrendo a uma variante do Princípio de Indução, considerando para base de indução o elemento de $\mathbb{N}$ a partir do qual se pode provar a validade da propriedade.

Teorema 3.2 (Princípio de Indução (Simples) para $\mathbb{N}$ de base n_0)**.** *Sejam* $p(n)$ *um predicado sobre* $\mathbb{N}$ *e* $n_0 \in \mathbb{N}$*.*
Se

(1) $p(n_0)$ *é verdadeira, e*

(2) para todo $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $k \geq n_0$*,* $p(k+1)$ *é verdadeira sempre que* $p(k)$ *é verdadeira,*

então $p(n)$ *é verdadeira, para todo* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $n \geq n_0$*.*

Exemplo 3.5. *Mostremos que, para todo o natural* $n \geq 2$*,* $3^n > 2^{n+1}$*.*

Representemos por $p(n)$ *o predicado "*$3^n > 2^{n+1}$*".*

(1) Base de indução: Para $n = 2$*, tem-se* $3^2 = 9 > 8 = 2^3$*, pelo que* $p(2)$ *é verdadeira.*

(2) Passo de indução: Seja $k \geq 2$ *tal que* $p(k)$ *é verdadeira, ou seja, tal que*

$$3^k > 2^{k+1}.$$

Então

$$3^{k+1} = 3 \times 3^k > 3 \times 2^{k+1} > 2 \times 2^{k+1} = 2^{k+2}$$

Então, pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$ *de base* 2 *e por (1) e por (2), concluímos que, para todo* $n \geq 2$*,* $3^n > 2^{n+1}$*.*

Exemplo 3.6. *Mostremos que, para todo o natural $n \geq 10$,*

$$2^n > n^3.$$

Representemos por $p(n)$ o predicado "$2^n > n^3$".

(1) Base de indução: Para $n = 10$, tem-se

$$2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3,$$

pelo que $p(10)$ é verdadeira.

(2) Passo de indução: Dado $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 10$, suponhamos que $p(k)$ é verdadeira, ou seja, que $2^k > k^3$.

Pretendemos mostrar que $p(k+1)$ é verdadeiro, isto é, que $2^{k+1} > (k+1)^3$. De facto, admitindo que $p(k)$ é verdadeiro, tem-se

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2 \cdot 2^k \\ &> 2 \cdot k^3 \\ &= k^3 + k^3 \\ &> k^3 + 9k^2 \\ &= k^3 + 3k^2 + 6k^2 \\ &> k^3 + 3k^2 + 54k \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + 51k \\ &> k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\ &= (k+1)^3. \end{aligned}$$

Então, pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$ de base 10 e por (1) e por (2), concluímos que, para todo $n \geq 10$, $2^n > n^3$.

3.2 Indução Completa

Na prova de certas propriedades sobre os naturais a aplicação do Princípio de Indução Simples não é fácil. Nestes casos torna-se conveniente optar por um método de prova que, embora sendo equivalente ao Princípio de Indução Simples, torna mais fácil a prova de certas propriedades - trata-se do **Princípio de Indução Completa** (também designado por **Princípio de Indução Forte**).

Teorema 3.3 (Princípio de Indução Completa para $\mathbb{N}$)**.** *Seja $p(n)$ um predicado sobre $\mathbb{N}$. Se*

(1) $p(1)$ é verdadeira, e

(2) para todo $k \in \mathbb{N}$, $p(k+1)$ é verdadeira sempre que $p(j)$ é verdadeira para todo $j \leq k$,

então $p(n)$ é verdadeira, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Embora o Princípio de Indução Completa pareça ser mais geral do que o Princípio de Indução Simples, verifica-se que se tratam de métodos de prova equivalentes: toda a prova que possa ser feita pelo Princípio de Indução Simples pode ser feita pelo Princípio de Indução Completa e vice-versa.

À semelhança do que acontece com o Princípio de Indução Simples, também podemos considerar o **Princípio de Indução Completa com base** n_0.

Teorema 3.4 (Princípio de Indução Completa para $\mathbb{N}$ de base n_0)**.** *Sejam $p(n)$ um predicado sobre $\mathbb{N}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$. Se*

(1) $p(n_0)$ é verdadeira, e

(2) para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq n_0$, $p(k+1)$ é verdadeira sempre que $p(j)$ é verdadeira para todo $j \leq k$,

então $p(n)$ é verdadeira, para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$.

Exemplo 3.7. *Recorrendo ao Princípio de Indução Completa de base 2 torna-se simples mostrar que*

$$\forall_{n \geq 2} \ n \text{ é primo ou é um produto de números primos.}$$

Representemos por $p(n)$ o predicado "n é primo ou n é produto de primos" e mostremos que se verificam as condições (1) e (2) do Princípio de Indução Completa de base 2.

(1) 2 é primo, logo $p(2)$ é verdadeira.

(2) Dado $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 2$, admitamos que, para todo $j \leq k$, $p(j)$ é verdadeira. Com base nesta hipótese, prova-se que $p(k+1)$ é verdadeira. De facto:

(i) Se $k+1$ é primo, então $p(k+1)$ é verdadeira.

(ii) Caso $k+1$ não seja primo, então existem $p, q \in \mathbb{N}$ tais que $p, q < k+1$ e $k+1 = pq$. Mas, $p, q \leq k$, logo, por hipótese, p é primo ou é produto de primos e q é primo ou é produto de primos.

Em qualquer dos casos conclui-se que $k+1$ é produto de primos e, portanto, $p(k+1)$ é verdadeira.

Assim, ficou provado que, para todo $k \geq 2$, se $p(j)$ é verdadeira para todo $j \leq k$, então $p(k+1)$ também é verdadeira.

De (1) e (2) e pelo Princípio de Indução Completa de base 2 segue que a proposição

$$\forall_{n \geq 2} \ n \text{ é primo ou é um produto de números primos}$$

é verdadeira.