Indução nos números naturais

Princípio de indução (simples) para $\mathbb{N}$

Seja $P(n)$ um predicado sobre os números naturais.

Se conseguirmos demonstrar que

1. $P(1)$ é verdadeira; e
2. para todo o natural k, se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ também é verdadeira;

podemos concluir que $P(n)$ é verdadeira para todo o número natural n.

A 1. chamamos **base de indução**; e a 2. chamamos **passo de indução**. À hipótese $P(k)$ na implicação do passo de indução chamamos **hipótese de indução** (HI).

Ex.: Seja $P(n)$ o predicado "$5^n - 1$ é múltiplo de 4".

1. $P(1)$ é verdadeira, pois $5^1 - 1 = 4$;
2. seja k um número natural qualquer e suponhamos que $P(k)$ é verdadeira, isto é, que $5^k - 1$ é múltiplo de 4;
   [queremos agora provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $5^{k+1} - 1$ é múltiplo de 4]
   então existe algum natural m tal que $5^k - 1 = 4m$;
   assim,
   $5^{k+1} - 1 = 5^k \times 5 - 1 = (4m+1) \times 5 - 1 = 4 \times 5m + 5 - 1 = 4(5m+1)$,
   que é um múltiplo de 4;
   portanto, se $P(k)$ é verdadeira, $P(k+1)$ também é.

Por 1. e 2. e pelo princípio de indução, concluímos que, para todo o natural n, $5^n - 1$ é múltiplo de 4.

Princípio de indução (simples) para $\mathbb{Z}$, com base n_0

Sejam n_0 um número inteiro e $P(n)$ um predicado sobre os números inteiros (ou pelo menos sobre os números inteiros maiores ou iguais a n_0).
Se conseguirmos demonstrar que

1. $P(n_0)$ é verdadeira; e
2. para todo o inteiro $k \geq n_0$, se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ também é verdadeira;

podemos concluir que $P(n)$ é verdadeira para todo o número inteiro $n \geq n_0$.

[Inclui o princípio de indução para $\mathbb{N}_0$.]

Ex.: Seja $P(n)$ o predicado $7n < 2^n$.

1. $P(6)$ é verdadeira, pois $7 \times 6 = 42 < 64 = 2^6$;
2. seja k um número inteiro tal que $k \geq 6$ e suponhamos que $P(k)$ é verdadeira, isto é, que $7k < 2^k$;
   então $7(k+1) = 7k+7 < 2^k+7 < 2^k+2^k = 2 \times 2^k = 2^{k+1}$;
   portanto, se $P(k)$ é verdadeira, $P(k+1)$ também é.

Por 1. e 2. e pelo princípio de indução, concluímos que, para todo o inteiro $n \geq 6$, $7n < 2^n$.

[Nota: $P(5)$ é falsa, já que $7 \times 5 = 35 \not< 32 = 2^5$.]

Princípio de indução forte para $\mathbb{N}$

Seja $P(n)$ um predicado sobre os números naturais.
Se conseguirmos demonstrar que

1. $P(1)$ é verdadeira; e
2. para todo o natural k, se $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ são verdadeiras, então $P(k+1)$ também é verdadeira;

podemos concluir que $P(n)$ é verdadeira para todo o número natural n.