Tópicos de Matemática

Lic. Ciências da Computação

2021/2022

2. Teoria Elementar de Conjuntos

A noção de conjunto é uma noção fundamental da matemática. Este conceito revela-se essencial não só em muitos campos da matemática, mas também em muitas outras áreas associadas à matemática como é o caso da área das ciências da computação.
O estudo de conjuntos, designado por Teoria de Conjuntos, foi introduzido por Georg Cantor nos finais do século XIX. A teoria de Cantor, um tanto intuitiva, conduz, contudo, a algumas inconsistências indesejáveis. No sentido de ultrapassar estas dificuldades, a teoria de Cantor foi posteriormente tratada de forma axiomática por vários matemáticos. Um dos sistemas axiomáticos mais conhecido é o sistema de Zermelo-Fraenkel, o qual foi proposto por Ernst Zermelo e Abraham-Fraenkel.
Ao longo deste texto adota-se uma abordagem intuitiva no estudo de conjuntos, sendo, no entanto, de notar que os resultados apresentados são também válidos no sistema axiomático referido.

2.1 Noções Básicas

Nesta unidade curricular vamos considerar a noção de conjunto como um conceito primitivo, i.e., como uma noção intuitiva, a partir da qual serão definidas outras noções.

Intuitivamente, um **conjunto** é uma coleção de objetos, designados os **elementos** ou **membros** do conjunto.

Exemplo 2.1. *São exemplos de conjuntos as coleções de:*

(1) disciplinas do primeiro ano curricular do plano de estudos de LCC;

(2) pessoas presentes numa festa;

(3) meses com 30 dias;

(4) vogais do alfabeto português.

São também exemplos de conjuntos os que a seguir são listados e que são frequentemente utilizados: o conjunto $\mathbb{N}$ de todos os números naturais; o conjunto $\mathbb{Z}$ de todos os números inteiros; o conjunto $\mathbb{Q}$ de todos os números racionais; o conjunto $\mathbb{R}$ de todos os números reais; o conjunto $\mathbb{C}$ de todos os números complexos.

Ao longo deste capítulo, estamos interessados no estudo de conjuntos de forma mais abstracta. Representaremos os conjuntos por letras maiúsculas A, B, C, ..., X, Y, Z (possivelmente com índices) e os elementos de um conjunto serão representados por letras minúsculas a, b, c, ..., x, y, z (também possivelmente com índices).

Dados um conjunto A um conjunto e um objeto x, diz-se que x **pertence a** A, e escrevemos $x \in A$, se x é um dos objetos de A. Caso x não seja um dos objetos de A, diz-se que x **não pertence a** A e escrevemos $x \notin A$.

Exemplo 2.2. *Tem-se, por exemplo,* $-2 \in \mathbb{Z}$, $0 \in \mathbb{Z}$, $1 \in \mathbb{Z}$, $0 \notin \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Um conjunto fica determinado quando são conhecidos os seus elementos. Assim, se A e B são dois conjuntos com os mesmos elementos, A e B dizem-se conjuntos **iguais** e escreve-se $A = B$. Esta facto, intuitivamente claro, é bastante significativo para ser expressa sob a forma de um princípio da teoria de conjuntos.

Princípio de Extensionalidade
Sejam A, B conjuntos. Tem-se $A = B$ se e só se A e B têm os mesmos elementos.

Simbolicamente, dois conjuntos A e B são iguais se a proposição

$$\forall_x \ (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

é uma proposição verdadeira. Dois conjuntos A e B dizem-se **diferentes**, e escreve-se $A \neq B$, se existir um elemento num dos conjuntos que não pertença ao outro.

Um conjunto pode ser descrito de diversas formas. Uma dessas formas consiste em enumerar explicitamente os seus elementos, os quais são colocados entre chavetas e separados por vírgulas - neste caso diz-se que o conjunto é descrito por **extensão**.

Exemplo 2.3.
(1) O conjunto A *dos números naturais menores do que* 5 *pode ser descrito por extensão por* $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
(2) O conjunto dos números naturais divisores de 4 *pode ser representado por* $\{1, 2, 4\}$.
(3) O conjunto B *dos números reais que são solução da equação* $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$ *também pode ser representado por* $B = \{1, 2, 4\}$.

Em certos casos, não é possível ou praticável a enumeração de todos os elementos do conjunto. Nestas situações, é usual listar alguns dos elementos do conjunto seguidos de reticências (...). Note-se, no entanto, que este tipo de representação não é precisa, podendo conduzir a interpretações erradas. Por exemplo, será que a partir da representação seguinte

$$\{7, 17, 37, 47, 2, 11, 3, 5, \ldots\}$$

é possível assegurar que este é o conjunto de todos os números naturais primos? Caso se opte por uma representação recorrendo a reticências, deve, então, ficar claro o que é pretendido, utilizando-se uma notação sugestiva e não ambígua que permita intuir os elementos do conjunto que não estão expressos.

Exemplo 2.4. *O conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros são usualmente representados usando a notação* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ *e* $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, *respetivamente. O conjunto dos naturais menores do que* 100 *pode ser representado por* $\{1, 2, 3, \ldots, 99\}$.

Na impossibilidade de se descrever um conjunto enumerando todos os seus elementos, pode-se optar por uma descrição mais rigorosa do conjunto, indicando um predicado $p(x)$ que seja satisfeito exatamente pelos elementos do conjunto; neste caso, o conjunto diz-se descrito por **compreensão**.

Na teoria intuitiva de conjuntos, a descrição de conjuntos por compreensão é justificada pelo Princípio de Abstração.

Princípio de Abstração
Dado um predicado $p(x)$, existe o conjunto dos objetos que satisfazem $p(x)$.

O conjunto dos objetos x tais que $p(x)$ é uma proposição verdadeira representa-se por $\{x \mid p(x)\}$ ou por $\{x : p(x)\}$.

O Princípio de Abstração é frequentemente utilizado pelos matemáticos, porém, a utilização deste princípio sem quaisquer restrições origina contradições. Admitamos que, usando este princípio, se define o conjunto R dos conjuntos que não pertencem a si próprios, i.e., $R = \{x \mid x \notin x\}$. Sendo R um conjunto pode-se, então, colocar a questão se R é um elemento de si mesmo. As únicas respostas possíveis para esta questão são $R \in R$ ou $R \notin R$, pelo que uma destas respostas deveria ser verdadeira. Contudo, qualquer uma destas opções conduz a uma contradição. De facto,

- se $R \in R$, então, por definição de R, $R \notin R$;
- se $R \notin R$, novamente por definição de R, $R \in R$.

A contradição anterior, descoberta por Bertrand Russel e resultante do facto do Princípio de Abstração permitir a definição do conjunto R, é conhecida como *paradoxo de Russel*.

No sentido de eliminar problemas como o que foi mencionado anteriormente, a teoria formal de conjuntos utiliza uma versão mais restrita do Princípio de Abstração, o Princípio de Compreensão, o qual estabelece restrições no tipo de predicados que são aceitas na definição de um conjunto.

Princípio de Compreensão (ou **Axioma de Separação**)
Dados um conjunto U e um predicado $p(x)$, existe o conjunto dos elementos de U que satisfazem $p(x)$.

O conjunto $\{x \,|\, x \in U \text{ e } p(x)\}$ dos elementos x pertencentes a U e tais que $p(x)$ é uma proposição verdadeira pode ser representado por $\{x \in U \,|\, p(x)\}$ ou por $\{x \in U \,:\, p(x)\}$.

Exemplo 2.5. *O conjunto* $\{1, 2, 4\}$ *pode ser descrito por* $\{n \in \mathbb{N} \,|\, n \text{ é divisor de } 4\}$ *ou por* $\{n \in \mathbb{N} \,|\, n \text{ é solução da equação } x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0\}$.

O Princípio de Compreensão não origina paradoxos como o Paradoxo de Russel, uma vez que os elementos são escolhidos de entre os elementos de um conjunto previamente conhecido. Dado um conjunto U, podemos definir o conjunto $R_U = \{x \in U \,|\, x \notin x\}$, sendo que a definição deste conjunto não conduz a uma contradição:

- se $R_U \in R_U$, então, por definição de R_U, $R_U \notin R_U$, pelo que temos uma contradição;
- se $R_U \notin R_U$, então, $R_U \notin U$ ou $R_U \in R_U$, donde se conclui que $R_U \notin U$.

Note-se que desta prova resulta que, para qualquer conjunto U, existe um conjunto que não é um elemento de U. Consequentemente, não existe um conjunto V tal que todo o conjunto é elemento de V, i.e. não existe o "o conjunto de todos os conjuntos".

Como já foi referido anteriormente, o Princípio de Abstração conduz a paradoxos tal como o Paradoxo de Russel, pelo que este princípio é rejeitado na teoria formal de conjuntos; em alternativa é utilizado o Princípio de Compreensão. Observe-se, no entanto, que a aplicação do Princípio de Compreensão em certos casos necessita de princípios adicionais que garantam a existência do conjunto U. No sentido de evitarmos, por agora, o estudo de tais princípios, continuaremos a usar o Princípio de Abstração, sendo, contudo, importante referir que todos os argumentos que aqui são apresentados são igualmente válidos se substituirmos o Princípio de Abstração pelo Princípio de Compreensão juntamente com princípios de existência.

Na teoria intuitiva de conjuntos assume-se a existência de um conjunto sem elementos e, pelo Princípio de Extensionalidade, este conjunto é único. Ao único conjunto que não tem qualquer elemento chamamos **conjunto vazio** e será representado por $\emptyset$ ou por $\{\}$. O conjunto vazio pode ser representado por compreensão, recorrendo a um predicado que não possa ser satisfeito. Por exemplo, $\emptyset = \{x \,|\, x \neq x\}$.

Definição 2.1. *Sejam A e B conjuntos. Diz-se que A* **está contido em** *B ou que A* **é subconjunto de** *B, e escreve-se $A \subseteq B$, se todo o elemento de A é também elemento de B, i.e., $A \subseteq B$ se e só se a proposição*

$$\forall_x \; (x \in A \to x \in B)$$

é uma proposição verdadeira. Diz-se que A **está propriamente contido em** *B ou que A* **é subconjunto próprio de** *B, e escreve-se $A \subsetneq B$ ou $A \subset B$, se $A \subseteq B$ e $A \neq B$.*

Caso exista um elemento de A que não seja elemento de B diz-se que A **não está contido em** *B ou que A* **não é subconjunto de** *B, e escreve-se $A \nsubseteq B$. Simbolicamente, $A \nsubseteq B$ se e só se*

$$\exists_{x \in A}\ x \notin B.$$

Exemplo 2.6.
(1) $\{-1, 1\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} \,|\, \wedge\ x^2 - 1 = 0\}$.
(2) $\{0, -1, 1\} \nsubseteq \{x \in \mathbb{R} \,|\, \wedge\ x^2 - 1 = 0\}$.
(3) $\{1, 4\} \subsetneqq \{n \in \mathbb{N} \,|\, n = a^2,$ *para algum* $a \in \{1, 2, 3\}\}$.
(4) $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

É importante distinguir a noção de um objeto pertencer a um conjunto da noção de um conjunto estar contido num outro conjunto. Seja $A = \{a, b, c\}$. Então $a \in A$ e $\{a\} \subseteq A$ são afirmações verdadeiras, mas $a \subseteq A$ e $\{a\} \in A$ são afirmações falsas. É também importante notar que um conjunto pode ser elemento de um outro conjunto. Seja $B = \{\{a\}, b, c\}$. Então $\{a\} \in B$ e $\{\{a\}\} \subseteq B$ são afirmações verdadeiras, mas $a \in B$ e $\{a\} \subseteq B$ são afirmações falsas.

Apresentam-se seguidamente algumas propriedades básicas a respeito da relação de inclusão entre conjuntos.

Proposição 2.2. *Sejam A, B e C conjuntos. Então são válidas as seguintes propriedades:*

(1) $\emptyset \subseteq A$.

(2) $A \subseteq A$.

(3) se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.

(4) $(A \subseteq B$ e $B \subseteq A)$ se e só se $A = B$.

Demonstração. (1) Mostremos, por redução ao absurdo, que $\emptyset \subseteq A$. Nesse sentido, admitamos que $\emptyset \nsubseteq A$. Então existe um elemento de $\emptyset$ que não pertence a A. Mas $\emptyset$ não tem elementos. Esta contradição resultou de admitirmos que $\emptyset \nsubseteq A$. Logo $\emptyset \subseteq A$.

(2) Todo o elemento de A é elemento de A. Logo $A \subseteq A$.

(3) Admitamos que $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$. Pretendemos mostrar que $A \subseteq C$. Seja $x \in A$. Então, como $A \subseteq B$, $x \in B$. Agora, como $x \in B$ e $B \subseteq C$, tem-se $x \in C$. Assim, todo o elemento de A é elemento de C, ou seja, $A \subseteq C$.

(4) Pretendemos mostrar que

$$(A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A) \text{ se e só se } A = B.$$

($\Rightarrow$) Suponhamos que $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. Então todo o elemento de A é elemento de B e todo o elemento de B é elemento de A. Logo A e B têm exatamente os mesmos elementos, ou seja, $A = B$.

($\Leftarrow$) Admitamos que $A = B$. Então todo o elemento de A é elemento de B, pelo que $A \subseteq B$. Todo o elemento de B é também elemento de A, pelo que $B \subseteq A$. $\square$

2.2 Operações com Conjuntos

Seguidamente estudamos alguns processos de construção que permitem, a partir de conjuntos dados, obter novos conjuntos.

Definição 2.3. *Sejam A e B conjuntos. Chama-se* **união** *ou* **reunião de** A **com** B, *e representa-se por $A \cup B$, o conjunto cujos elementos são os elementos de A e os elementos de B, ou seja,*

$$A \cup B = \{x \,|\, x \in A \vee x \in B\}.$$

Exemplo 2.7. *Se $A = \{-2, 0, 2, 3, 7\}$, $B = \{-1, 0, 2\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 2\}$, tem-se: $A \cup B = \{-2, -1, 0, 2, 3, 7\}$, $A \cup C = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 2\} \cup \{3, 7\}$.*

Apresentam-se de seguida algumas propriedades relativas à união de conjuntos.

Proposição 2.4. *Sejam A, B e C conjuntos. Então,*

(1) $A \subseteq A \cup B$ e $B \subseteq A \cup B$.

(2) $A \cup \emptyset = A$.

(3) $A \cup A = A$.

(4) $A \cup B = B \cup A$.

(5) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

(6) se $A \subseteq B$, então $A \cup B = B$.

Demonstração. Demonstramos as propriedades (1), (2), (5) e (6), ficando a prova das restantes como exercício.

(1) Vamos mostrar que $A \subseteq A \cup B$. Seja $x \in A$. Então,

$$x \in A \vee x \in B$$

é uma proposição verdadeira, pelo que $x \in A \cup B$. Logo todo o elemento de A é elemento de $A \cup B$ e, portanto, $A \subseteq A \cup B$. A prova de $B \subseteq A \cup B$ é semelhante.

(2) Mostremos que $A \cup \emptyset = A$. Da propriedade (1), sabe-se que $A \subseteq A \cup \emptyset$. Para termos a prova de $A \cup \emptyset = A$, resta mostrar que $A \cup \emptyset \subseteq A$. Consideremos $x \in A \cup \emptyset$. Então

$$x \in A \vee x \in \emptyset.$$

Dado que $\emptyset$ não tem elementos, podemos concluir que $x \in A$. Logo todo o elemento de $A \cup \emptyset$ é elemento de A, pelo que $A \cup \emptyset \subseteq A$. De $A \subseteq A \cup \emptyset$ e $A \cup \emptyset \subseteq A$, tem-se $A \cup \emptyset = A$

(5) Facilmente se prova que $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$. De facto, para todo o objeto x, tem-se

$$\begin{array}{rcll} x \in (A \cup B) \cup C & \Leftrightarrow & x \in A \cup B \vee x \in C & \text{(definição de união)} \\ & \Leftrightarrow & (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C & \text{(definição de união)} \\ & \Leftrightarrow & x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) & \text{(associatividade de } \vee\text{)} \\ & \Leftrightarrow & x \in A \vee (x \in B \cup C) & \text{(definição de união)} \\ & \Leftrightarrow & x \in A \cup (B \cup C). & \text{(definição de união)} \end{array}$$

Logo a proposição

$$\forall_x \, (x \in A \cup (B \cup C) \leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C)$$

é verdadeira e, portanto, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

(6) Admitamos que $A \subseteq B$ e mostremos que $A \cup B = B$. Pela propriedade (1), temos $B \subseteq A \cup B$. Assim, resta mostrar que $A \cup B \subseteq B$. Dado que $A \subseteq B$, todo o elemento de A é também elemento de B, donde segue que, para todo o objeto x,

$$\begin{array}{rcll} x \in A \cup B & \Rightarrow & x \in A \vee x \in B & \text{(definição de } A \cup B\text{)} \\ & \Rightarrow & x \in B \vee x \in B & (A \subseteq B) \\ & \Rightarrow & x \in B. & \text{(idempotência de } \vee\text{)} \end{array}$$

Assim, todo o elemento de $A \cup B$ é elemento de B e, portanto, $A \cup B \subseteq B$. De $B \subseteq A \cup B$ e $A \cup B \subseteq B$ tem-se $A \cup B = B$. □

Definição 2.5. *Sejam A e B conjuntos. Chama-se* **interseção de A com B**, *e representa-se por $A \cap B$, o conjunto cujos elementos pertencem simultaneamente a A e a B, isto é,*

$$A \cap B = \{x \,|\, x \in A \wedge x \in B\}.$$

Exemplo 2.8. *Se $A = \{-2, 0, 2, 3, 7\}$, $B = \{-1, 0, 2, 6\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 3 < x < 6\}$, tem-se: $A \cap B = \{0, 2\}$, $A \cap C = \emptyset$.*

A definição seguinte formaliza a noção de dois conjuntos que não têm elementos em comum.

Definição 2.6. *Sejam A e B conjuntos. Os conjuntos A e B dizem-se* **disjuntos** *se $A \cap B = \emptyset$.*

No resultado seguinte listam-se algumas propriedades relativas à operação de intersecão de conjuntos.

Proposição 2.7. *Sejam A, B e C conjuntos. Então,*

(1) $A \cap B \subseteq A$ e $A \cap B \subseteq B$.

(2) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

(3) $A \cap A = A$.

(4) $A \cap B = B \cap A$.

(5) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(6) se $A \subseteq B$, *então* $A \cap B = A$.

Demonstração. Apresentamos a prova das propriedades (1), (2) e (5). A prova das restantes propriedades fica ao cuidado do leitor.

(1) Mostremos que $A \cap B \subseteq A$. Dado $x \in A \cap B$, tem-se

$$x \in A \wedge x \in B,$$

pelo que $x \in A$ é uma proposição verdadeira. Logo todo o elemento de $A \cap B$ é elemento de A. Portanto $A \cap B \subseteq A$. A prova de $B \subseteq A \cap B$ é análoga.

(2) Pretendemos mostrar que $A \cap \emptyset = \emptyset$. No sentido de fazer esta prova por redução ao absurdo, admitamos que $A \cap \emptyset \neq \emptyset$. Então, existe um objeto x tal que

$$x \in A \wedge x \in \emptyset;$$

em particular, $x \in \emptyset$. Mas $\emptyset$ não tem elementos. Esta contradição resultou de admitirmos que $A \cap \emptyset$ tinha elementos. Assim, $A \cap \emptyset = \emptyset$.

(5) Mostremos que $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. De facto, para todo o objeto x, tem-se

$$\begin{array}{rcll} x \in (A \cap B) \cap C & \Leftrightarrow & x \in A \wedge x \in (B \cap C) & \text{(definição de interseção)} \\ & \Leftrightarrow & x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) & \text{(definição de interseção)} \\ & \Leftrightarrow & (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C & \text{(associatividade de } \wedge) \\ & \Leftrightarrow & x \in (A \cap B) \wedge x \in C & \text{(definição de interseção)} \\ & \Leftrightarrow & x \in (A \cap B) \cap C & \text{(definição de interseção)} \end{array}$$

e, portanto, a proposição

$$\forall_x \left((x \in A \cap B) \cap C \leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C)\right)$$

é verdadeira. Logo $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. □

Sejam A, B e C conjuntos. Tendo em conta que as operações de união e de interseção de conjuntos gozam da propriedade associativa, podemos escrever, sem ambiguidade, $A \cup B \cup C$ e $A \cap B \cap C$.

Definição 2.8. *Sejam A e B conjuntos. Chama-se* **complementar** *de B* **em** *A, e representa-se por $A \setminus B$ ou $C_A(B)$, o conjunto cujos elementos pertencem a A mas não a B, ou seja,*

$$A \setminus B = \{x \,|\, x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Por vezes, o complementar de B em A é também designado por **diferença de** *A* **com** *B e representado por $A - B$. Quando não existe ambiguidade relativamente ao conjunto A, é usual escrever $\overline{B}$ ou B' para representar $A - B$.*

Exemplo 2.9. *Dados os conjuntos $A = \{-2, 0, 3, 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 3 < x < 6\}$, tem-se:* $A \setminus B = \{-2, 0, 3\}$, $C_{\mathbb{R}}(A \cup B) =]-\infty, -2[\cup]-2, 0[\cup]0, 3[\cup[6, +\infty[$, $C_{\mathbb{R}}(A \cup B) \cap (A \cup B) = \emptyset$.

A respeito da operação de complementação, provam-se facilmente as propriedades seguintes.

Proposição 2.9. *Sejam A, B e C conjuntos. Então são válidas as propriedades seguintes:*

(1) $A \setminus \emptyset = A$.

(2) se $A \subseteq B$, *então* $A \setminus B = \emptyset$.

(3) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

(4) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Demonstração. Apresentamos a prova das propriedades (1) e (3).

(1) Por definição, $A \setminus \emptyset$ é o conjunto dos elementos que pertencem a A mas não pertencem a $\emptyset$. Mas $\emptyset$ não tem elementos, pelo que não se retira qualquer elemento a A e, portanto, $A \setminus \emptyset = A$.

(3) Pretendemos mostrar que $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Ora, para todo o objeto x, tem-se

$$\begin{array}{rcll}
x \in A \setminus (B \cup C) & \Leftrightarrow & x \in A \wedge x \notin (B \cup C) & \text{(definição de complementar)} \\
& \Leftrightarrow & x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C) & \text{(definição de união)} \\
& \Leftrightarrow & x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) & \text{(lei de De Morgan)} \\
& \Leftrightarrow & (x \in A \wedge x \in A) \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) & \text{(idempotência de } \wedge\text{)} \\
& \Leftrightarrow & (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) & \text{(associatividade e comutatividade de } \wedge\text{)} \\
& \Leftrightarrow & x \in (A \setminus B) \wedge x \in (A \setminus C) & \text{(definição de complementar)} \\
& \Leftrightarrow & x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) & \text{(definição de interseção).}
\end{array}$$

Assim, os conjuntos $A \setminus (B \cup C)$ e $(A \setminus B) \cap (A \setminus C))$ têm os mesmos elementos e, portanto, $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

□

2.3 Conjunto potência

Apresentam-se seguidamente outros processos para construir conjuntos a partir de conjuntos dados; em particular, estudamos o *conjunto potência* de um dado conjunto.

Em certas situações pode ser útil considerar o conjunto de todos os subconjuntos de um determinado conjunto, o que motiva a definição seguinte.

Definição 2.10. *Seja A um conjunto. Chamamos* **conjunto das partes de** A *ou* **conjunto potência de** A, *e representamos por $\mathcal{P}(A)$, ao conjunto de todos os subconjuntos de A, ou seja, $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$.*

Exemplo 2.10. *Sejam $A = \{a, b\}$, $B = \{1, \{2\}, 3\}$ e $C = \emptyset$. Então*

(1) $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

(2) $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{2\}\}, \{3\}, \{1, \{2\}\}, \{1, 3\}, \{\{2\}, 3\}, \{1, \{2\}, 3\}\}$.

(3) $\mathcal{P}(C) = \{\emptyset\}$.

Proposição 2.11. *Sejam A e B conjuntos. Então*

(1) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ *e* $A \in \mathcal{P}(A)$.

(2) Se $A \subseteq B$, então $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

(3) Se A tem n elementos, $n \in \mathbb{N}$, então $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos.

Demonstração. (1) Para qualquer conjunto A, tem-se $\emptyset \subseteq A$ e $A \subseteq A$. Logo $\emptyset$ e A são elementos de $\mathcal{P}(A)$.

(2) Admitamos que $A \subseteq B$. Vamos mostrar que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Dado $X \in \mathcal{P}(A)$, tem--se $X \subseteq A$. Logo, como $A \subseteq B$, segue que $X \subseteq B$, o que significa que $X \in \mathcal{P}(B)$. Provámos que todo o elemento de $\mathcal{P}(A)$ é também elemento de $\mathcal{P}(B)$ e, portanto, $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

(3) Seja A um conjunto com n elementos, digamos $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Cada subconjunto B de A pode caracterizar-se por uma sequência de 0's e 1's de comprimento n: caso o i-enésimo elemento da sequência seja 1 tal significa que $a_i \in B$; caso o i-enésimo da sequência seja 0 tal significa que $a_i \notin B$. Basta agora observar que existem 2^n sequências de 0's e 1's de comprimento n.□ □

2.4 Produto cartesiano

Dados objetos a, b, os conjuntos $\{a, b\}$ e $\{b, a\}$ são iguais, não interessando a ordem pela qual os elementos ocorrem. No entanto, em certas situações, interessa considerar os objetos por determinada ordem. Sendo assim, introduz-se, em termos de conjuntos, a noção de par ordenado.

Definição 2.12. *Sejam a, b objetos. O* **par ordenado de a e b**, *representado por (a, b), é o conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.*

Observe-se que o par (a, a) é o conjunto $\{\{a\}\}$. Reciprocamente, se (a, b) é um conjunto singular, tem-se $\{a\} = \{a, b\}$, donde $b \in \{a\}$ e, portanto, $a = b$.

Proposição 2.13. *Para quaisquer objetos a, b, c, d, tem-se $(a, b) = (c, d)$ se e só se $a = c$ e $b = d$.*

Num par ordenado a ordem dos elementos é relevante: dados dois objetos a, b, se $a \neq b$, tem-se $\{\{a\}, \{a, b\}\} \neq \{\{b\}, \{a, b\}\}$ e, portanto, $(a, b) \neq (b, a)$.

Num par ordenado (a, b) designa-se o objeto a como a **primeira componente (ou primeira coordenada)** e o objeto b como a **segunda componente (ou segunda coordenada)**.

Os pares ordenados permitem formar novos conjuntos a partir de conjuntos dados.

Definição 2.14. *Sejam A, B conjuntos. O* **produto cartesiano de A por B**, *representado por $A \times B$, é o conjunto formado por todos os pares ordenados (a, b) em que $a \in A$ e $b \in B$, i.e., $A \times B = \{(a, b) \,|\, a \in A \wedge b \in B\}$.*

Exemplo 2.11.

(1) *Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Então*

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1, a), (2, a), (1, b), (2, b), (1, c), (2, c)\}; \\ B \times A &= \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}. \end{aligned}$$

É claro que $A \times B \neq B \times A$, pois $(1, a) \in A \times B$, mas $(1, a) \notin B \times A$.

(2) *Sejam*

$$A = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}$$

e

$$B = \{m \in \mathbb{Z} \,|\, m = 3j, \text{ para algum } j \in \mathbb{Z}\}.$$

Então

$$A \times B = \{(2k, 3j) \,|\, k, j \in \mathbb{Z}\}.$$

Apresentam-se de seguida algumas propriedades relacionadas com o produto cartesiano.

Proposição 2.15. *Para quaisquer conjuntos A, B, C e D, tem-se:*

(1) $A \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times A$.

(2) Se $A, B \neq \emptyset$, *então* $A \subseteq C$ *e* $B \subseteq D$ *se e só se* $A \times B \subseteq C \times D$.

(3) $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$;

(4) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

(5) $C \times (A \cap B) = (C \times A) \cap (C \times B)$;

(6) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

(7) $C \times (A \setminus B) = (C \times A) \setminus (C \times B)$;

(8) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

Demonstração. Apresentamos a prova das propriedades (2) e (7).

(2) Sejam A e B conjuntos não vazios. Pretendemos mostrar que $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$ se e só se $A \times B \subseteq C \times D$.

($\Rightarrow$) Suponhamos que $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$ e mostremos que $A \times B \subseteq C \times D$. Seja $(a, b) \in A \times B$. Então, por definição de produto cartesiano, $a \in A$ e $b \in B$. Mas, por hipótese, todo o elemento de A é elemento de C e todo o elemento B é elemento de D. Logo $a \in C$ e $b \in D$ e, portanto, $(a, b) \in C \times D$. Assim, todo o elemento de $A \times B$ é um elemento de $C \times D$, pelo que $A \times B \subseteq C \times D$.

($\Leftarrow$) Admitamos que $A \times B \subseteq C \times D$. Queremos mostrar que $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$. Seja $a \in A$. Uma vez que $B \neq \emptyset$, existe $b \in B$. Então, por definição de produto cartesiano, $(a, b) \in A \times B$. Por hipótese, todo o elemento de $A \times B$ é elemento de $C \times D$. Logo $(a, b) \in C \times D$, pelo que $a \in C$ e $b \in D$. Assim, todo o elemento de A é também elemento de C e, portanto, $A \subseteq C$. De modo análogo prova-se que $B \subseteq D$.

(7) Mostremos que $C \times (A \setminus B) = (C \times A) \setminus (C \times B)$. Para todo o par (x, y),

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in (C \times A) \setminus (C \times B) &\Leftrightarrow (x,y) \in C \times A \wedge (x,y) \notin C \times B \\
&\Leftrightarrow (x \in C \wedge y \in A) \wedge (x \notin C \vee y \notin B) \\
&\Leftrightarrow ((x \in C \wedge y \in A) \wedge x \notin C) \\
&\qquad \vee((x \in C \wedge y \in A) \wedge y \notin B) \\
&\Leftrightarrow (x \in C \wedge y \in A) \wedge y \notin B \\
&\Leftrightarrow x \in C \wedge (y \in A \wedge y \notin B) \\
&\Leftrightarrow x \in C \wedge y \in (A/B) \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in C \times (A/B).
\end{aligned}
$$

Logo, a proposição

$$\forall_{(a,b)}\ (a,b) \in C \times (A \setminus B) \leftrightarrow (a,b) \in (C \times A) \setminus (C \times B)$$

é verdadeira e, portanto $C \times (A \setminus B) = (C \times A) \setminus (C \times B)$. □

Observe-se que se A e B são conjuntos com p e q elementos ($p, q \in \mathbb{N}_0$), respectivamente, então $A \times B$ tem $p \times q$ elementos.

2.5 Famílias de Conjuntos

Em diversas situações existe a necessidade de considerarmos conjuntos cujos objetos são conjuntos. A um conjunto de conjuntos dá-se a designação de *família de conjuntos*.

Definição 2.16. *Dá-se a designação de* **família de conjuntos** *a um conjunto $\mathcal{F}$ cujos elementos são todos conjuntos.*

Definição 2.17. *Seja I um conjunto conjunto e, para cada $i \in I$, seja A_i um conjunto. O conjunto $\mathcal{F} = \{A_i \mid i \in I\}$ diz-se uma* **família de conjuntos indexada por** *I e escreve-se $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in I}$. Ao conjunto I dá-se o nome de* **conjunto de índices**.

Exemplo 2.12. *Para cada $i \in \mathbb{N}_0$, seja $A_i = \{x \mid x \in \mathbb{N}_0 \wedge x \leq i\}$. Assim, $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ é uma família de conjuntos indexada por $\mathbb{N}_0$.*

Embora, em geral, seja mais simples trabalhar com famílias indexadas, existem famílias de conjuntos para as quais não é natural encontrar um conjunto de índices, como é o caso da família seguinte

$$\mathcal{B} = \{B \mid B \subseteq A \text{ e } B \text{ é finito}\}.$$

No entanto, qualquer família de conjuntos pode ser indexada por algum conjunto; em particular, pode-se considerar qualquer família de conjuntos $\mathcal{F}$ indexada por $\mathcal{F}$, i.e. $\mathcal{F} = \{A_X\}_{X \in \mathcal{F}}$, embora este tipo de indexação não seja particularmente útil.

Vejamos, agora, de que forma se generalizam as noções de união e interseção a famílias de conjuntos.

Definição 2.18. *Seja $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos. A* **união de** *$\mathcal{F}$, representada por $\bigcup \mathcal{F}$, é o conjunto definido por*

$$\bigcup \mathcal{F} = \{x \mid \exists_{A \in \mathcal{F}}\ x \in A\}.$$

Se $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in I}$ é uma família de conjuntos indexada por um conjunto I, escreve-se $\bigcup_{i \in I} A_i$ para representar $\bigcup \mathcal{F}$; em particular, no caso em que $I = \{1, \ldots, n\}$, escreve-se $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ para representar $\bigcup \mathcal{F}$.

Observe-se que se $\mathcal{F} = \emptyset$, então $\bigcup \mathcal{F} = \emptyset$. Além disso, para qualquer família de conjuntos $\mathcal{F}$ e para qualquer $A \in \mathcal{F}$, tem-se $A \subseteq \bigcup \mathcal{F}$.

Definição 2.19. *Seja $\mathcal{F}$ uma família não vazia de conjuntos. A* **interseção de** *$\mathcal{F}$, representada por $\bigcap \mathcal{F}$, é o conjunto definido por*

$$\bigcap \mathcal{F} = \{x \mid \forall_{A\in\mathcal{F}} \ x \in A\}.$$

Se $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i\in I}$ é uma família de conjuntos indexada por um conjunto I, escreve-se $\bigcap_{i\in I} A_i$ para representar $\bigcap \mathcal{F}$; no caso em que $I = \{1, \ldots, n\}$, escreve-se $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ para representar $\bigcap \mathcal{F}$.

Para qualquer família não vazia de conjuntos $\mathcal{F}$ e para qualquer $A \in \mathcal{F}$, tem-se $\bigcap \mathcal{F} \subseteq A$.

Caso $\mathcal{F}$ seja uma família de subconjuntos de um certo conjunto U e $\mathcal{F} = \emptyset$, alguns autores convencionam que $\bigcap \mathcal{F} = U$.

Exemplo 2.13.

(1) Para cada $i \in \mathbb{N}_0$, seja $A_i = \{x \mid x \in \mathbb{N}_0 \wedge x \leq i\}$. Então:

(i) $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = \mathbb{N}_0$; *(ii)* $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i = \{0\}$.

(2) Para cada $i \in \mathbb{N}$, seja $B_i = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge \frac{1}{i} < x < 8 + \frac{3}{i}\}$. Então:

(i) $\displaystyle\bigcup_{i\in I} B_i =]0, 11[$; *(ii)* $\displaystyle\bigcap_{i\in I} B_i =]1, 8]$.

Muitas das propriedades válidas para a união e para a interseção de dois conjuntos são extensíveis a famílias de conjuntos.

Proposição 2.20. *Sejam $\mathcal{F}$ uma família não vazia de conjuntos e B um conjunto. Então*

(1) $A \subseteq \bigcup_{X\in\mathcal{F}} X$, *para todo* $A \in \mathcal{F}$. (2) $\bigcap_{X\in\mathcal{F}} X \subseteq A$, *para todo* $A \in \mathcal{F}$.

(3) $B \cap \left(\bigcup_{X\in\mathcal{F}} X\right) = \bigcup_{X\in\mathcal{F}}(B \cap X)$. (4) $B \cup \left(\bigcap_{X\in\mathcal{F}} X\right) = \bigcap_{X\in\mathcal{F}}(B \cup X)$.

(5) $B \setminus \left(\bigcap_{X\in\mathcal{F}} X\right) = \bigcup_{X\in\mathcal{F}} (B \setminus X)$. (6) $B \setminus \left(\bigcup_{X\in\mathcal{X}} X\right) = \bigcap_{X\in\mathcal{F}} (B \setminus X)$.

(7) $B \times \left(\bigcap_{X\in\mathcal{F}} X\right) = \bigcap_{X\in\mathcal{F}} (B \times X)$. (8) $B \times \left(\bigcup_{X\in\mathcal{F}} X\right) = \bigcup_{X\in\mathcal{F}} (B \times X)$.

Demonstração. Apresenta-se a prova das propriedades (3) e (5) , ficando a prova das restantes propriedades ao cuidado do leitor.

(3) Seja $x \in B \cap \left(\bigcup_{X\in\mathcal{F}} X\right)$. Então $x \in B$ e $x \in \bigcup_{X\in\mathcal{F}} X$. Daqui segue que $x \in Y$, para algum $Y \in \mathcal{F}$. Logo $x \in B \cap Y$, para algum $Y \in \mathcal{F}$, pelo que $x \in \bigcup_{X\in\mathcal{F}}(B \cap X)$. Portanto, $B \cap \left(\bigcup_{X\in\mathcal{F}} X\right) \subseteq \bigcup_{X\in\mathcal{F}}(B \cap X)$.
Reciprocamente, admitamos que $x \in \bigcup_{X\in\mathcal{F}}(B \cap X)$. Então existe $Y \in \mathcal{F}$ tal que $x \in B \cap Y$, isto é, existe $Y \in \mathcal{F}$ tal que $x \in B$ e $x \in Y$. Logo $x \in B$ e $x \in \bigcup_{X\in\mathcal{F}} X$ e, portanto, $x \in B \cap \left(\bigcup_{X\in\mathcal{F}} X\right)$. Assim, $\bigcup_{X\in\mathcal{F}}(B \cap X) \subseteq B \cap \left(\bigcup_{X\in\mathcal{F}} X\right)$.
Desta forma, provou-se que $B \cap \left(\bigcup_{X\in\mathcal{F}} X\right) = \bigcup_{X\in\mathcal{F}}(B \cap X)$.

(5) Seja $x \in B \setminus \left(\bigcap_{X\in\mathcal{F}} X\right)$. Então $x \in B$ e $x \notin \bigcap_{X\in\mathcal{F}} X$. Logo $x \in B$ e $x \notin Y$, para algum $Y \in \mathcal{F}$, pelo que $x \in B \setminus Y$. Assim, $x \in \bigcup_{X\in\mathcal{F}}(B \setminus X)$. Por conseguinte, $B \setminus \left(\bigcap_{X\in\mathcal{F}} X\right) \subseteq \bigcup_{X\in\mathcal{F}} (B \setminus X)$.
Reciprocamente, admitamos que $x \in \bigcup_{X\in\mathcal{F}} (B \setminus X)$. Então, para algum $Y \in \mathcal{F}$, $x \in B \setminus Y$, isto é, $x \in B$ e $x \notin Y$. Assim, $x \in B$ e $x \notin \bigcap_{X\in\mathcal{F}} X$, ou seja, $x \in B \setminus \left(\bigcap_{X\in\mathcal{F}} X\right)$. Portanto, $\bigcup_{X\in\mathcal{F}} (B \setminus X) \subseteq B \setminus \left(\bigcap_{X\in\mathcal{F}} X\right)$.
Do que foi provado conclui-se que $B \setminus \left(\bigcap_{X\in\mathcal{F}} X\right) = \bigcup_{X\in\mathcal{F}} (B \setminus X)$. □

Facilmente, pode-se verificar que as propriedades (1), (3) e (8) da proposição anterior são também válidas quando $\mathcal{F} = \emptyset$.

A noção de produto cartesiano de conjuntos também pode ser generalizada. Nesta secção generalizamos a noção de produto cartesiano a famílias finitas de conjuntos, mas esta noção pode ser generalizada a famílias infinitas de conjuntos (de momento consideramos apenas a noção intuitiva de conjunto *finito* e conjunto *infinito*, estes conceitos serão definidos rigorosamente no capítulo 6).

Se A, B e C são conjuntos, podemos considerar os conjuntos $(A \times B) \times C$ e $A \times (B \times C)$. Rigorosamente, estes conjuntos são diferentes, uma vez que no primeiro caso temos elementos da forma $((a, b), c)$ e no segundo caso os elementos são da forma $(a, (b, c))$. Porém, uma vez que não existe diferença prática entre estes dois conjuntos, é usual representar qualquer um dos conjuntos por $A \times B \times C$ e os seus elementos por (a, b, c). Tal motiva a definição seguinte.

Definição 2.21. *Seja $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in I}$ uma família de conjuntos indexada por $I = \{1, \ldots, n\}$. Designa-se por produto cartesiano de A_1, ..., A_n, e representa-se por $A_1 \times \cdots \times A_n$ ou por $\prod_{i \in I} A_i$, o conjunto formado pelos n-uplos ordenados $(a_1, \ldots, a_n)$ em que $a_1 \in A_1$, ..., $a_n \in A_n$, i.e.,*

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \,|\, a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

No caso em que $A_1 = \cdots = A_n = A$, escrevemos A^n em alternativa a $A_1 \times \cdots \times A_n$.

Se $I = \{1, \ldots, n\}$ e se cada conjunto A_i tem p_i elementos, então $\prod_{i \in I} A_i$ tem $p_1 \times \cdots \times p_n$ elementos.

2.6 Axiomas da Teoria de Conjuntos

A noção de conjunto utilizada nas secções anteriores é uma noção intuitiva. Esta noção, adotada por Georg Cantor no desenvolvimento da teoria de conjuntos, é também adotada pela maioria dos matemáticos contemporâneos. Este conceito intuitivo, embora seja adequado para os resultados estudados ao longo do curso, nem sempre é suficiente; recorde-se que pelo Princípio de Abstração seria possível construir o conjunto $\{x \,|\, x \notin x\}$, porém tal construção conduz a problemas como o do Paradoxo de Russel. Assim, no sentido de resolver problemas deste tipo e de se conseguir um estudo mais rigoroso da teoria de conjuntos, vários sistemas axiomáticos foram desenvolvidos ao longo do tempo. O sistema de axiomas de Zermelo-Fraenkel (ZF), desnvolvido por Ernst Zermelo e Abraham Fraenkel, é um desses sistemas.

Axiomas de Zermelo-Fraenkel

1. Axioma de Extensionalidade Dois conjuntos são iguais se e só se têm os mesmos elementos.

$$\forall_x \forall_y \, (x = y \leftrightarrow \forall z \, (z \in x \leftrightarrow z \in y)).$$

2. Axioma do Conjunto Vazio Existe um conjunto sem elementos.

$$\exists_x \forall_y \, (y \notin x).$$

3. Axioma do Par Para quaisquer dois conjuntos x e y, existe um conjunto cujos elementos são precisamente os conjuntos x e y.

$$\forall_x \forall_y \exists_z \forall_w \, (w \in z \leftrightarrow (w = x \vee w = y)).$$

4. Axioma de Separação Seja $p(z)$ um predicado. Para qualquer conjunto x existe um conjunto cujos elementos são exatamente todos os conjuntos $z \in x$ para os quais $p(z)$ se verifica.

$$\forall_x \exists_y \forall_z \, (z \in y \leftrightarrow (z \in x \, \wedge \, p(z))).$$

5. Axioma do Conjunto Potência Para todo o conjunto x existe um conjunto z constituído exatamente por todos os subconjuntos de x.

$$\forall_x \exists_y \forall_z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x).$$

6. Axioma da União Para qualquer conjunto x existe um conjunto y que é a união de todos os elementos de x.

$$\forall_x \exists_y \forall_z (z \in y \leftrightarrow \exists_w \, (z \in w \wedge w \in x)).$$

7. Axioma do infinito Existe um conjunto indutivo.

$$\exists_x \, (\emptyset \in x \wedge \forall y \, (y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x)).$$

8. Axioma da substituição Seja $p(x, y)$ um predicado nas variáveis x e y. Para qualquer conjunto z, se para qualquer $x \in z$ existe um único y tal que $p(x, y)$, então existe um conjunto w constituído por todos os elementos y tais que $p(x, y)$ para algum $x \in z$.

$$\forall_x \, ((\forall_{x \in z} \exists^1{}_y \, p(x, y)) \rightarrow \exists_w \forall_y (y \in w \leftrightarrow \exists_{x \in z} p(x, y))).$$

9. Axioma de regularidade Todo o conjunto não vazio x tem um elemento disjunto de x.

$$\forall_x \exists_y \, (y \in x \, \wedge \, y \cap x = \emptyset).$$

Para além dos axiomas incluídos no sistema ZF, Zermelo estabeleceu um outro axioma, o Axioma da Escolha, o qual desempenha um papel fundamental no estudo de conjuntos infinitos. O sistema de axiomas resultante de acrescentar o Axioma da Escolha ao sistema ZF é denotado por ZFC.

Axioma da Escolha Para qualquer família não vazia $(A_i)_{i \in I}$ de conjuntos não vazios, é possível escolher uma família $(x_i)_{i \in I}$ de elementos tais que, para cada $i \in I$, se tem $x_i \in A_i$.

Intuitivamente, este axioma estabelece que, dada uma coleção não vazia de conjuntos não vazios, é possível escolher simultaneamente um elemento de cada um dos conjuntos. O Axioma da Escolha admite várias formulações, como, por exemplo, a seguinte:

> Seja $(A_i)_{i \in I}$ uma família não vazia de conjuntos não vazios. Então existe uma família de conjuntos $(C_i)_{i \in I}$ tal que $C_i \subseteq A_i$ e C_i tem exatamente um elemento, para todo $i \in I$.

Embora o Axioma da Escolha seja aceite pela maioria dos matemáticos e existam resultados importantes que são estabelecidos com base neste axioma, a aceitação do Axioma da Escolha não é consensual. Uma das razões pelas quais este axioma foi inicialmente controverso prendia-se com a hipótese de ser possível prová-lo a partir dos restantes axiomas de Zermelo-Fraenkel e, por isso, seria redundante. Porém, em 1963, Paul Cohen e Kurt Gödel vieram a provar que o Axioma da Escolha é independente dos restantes axiomas do sistema ZF. Outra das razões que levam alguns matemáticos a questionar este axioma prende-se com o facto de este não ser construtivo. Embora seja lícito escolher um elemento em cada um dos conjuntos de uma coleção finita de conjuntos não vazios, será que é possível garantir esta escolha quando se considera uma família infinita de conjuntos não vazios? Atendendo a que a aceitação do Axioma da Escolha não é consensual, é usual referir expressamente a utilização deste axioma sempre que é aplicado na prova de algum resultado.