tópicos de matemática - lcc

paula mendes martins

departamento de matemática - uminho

desafios

desafio 1

O Sr. Preto, o Sr. Castanho e o Sr. Verde estavam a almoçar juntos.

Um deles trazia uma gravata preta, outro trazia uma gravata castanha e o terceiro trazia uma gravata verde.

"Já repararam que", disse o homem da gravata verde, "apesar das nossas gravatas serem de cores iguais aos nossos nomes, nenhum de nós traz a gravata que corresponde ao seu nome?"

"Realmente tens razão", exclamou o Sr. Castanho.

De que cor era a gravata de cada um?

desafio 2

1. Exatamente uma destas frases é falsa;
2. Exatamente duas destas frases são falsas;
3. Exatamente três destas frases são falsas;
4. Exatamente quatro destas frases são falsas;
5. Exatamente cinco destas frases são falsas;
6. Exatamente seis destas frases são falsas;
7. Exatamente sete destas frases são falsas;
8. Exatamente oito destas frases são falsas;
9. Exatamente nove destas frases são falsas;
10. Exatamente dez destas frases são falsas.

Das 10 afirmações, quantas são verdadeiras e quantas são falsas?

desafio 3

Um crime foi cometido por uma e apenas uma pessoa de um grupo de cinco suspeitos: Armando, Bernardo, Carlos, Daniel e Eduardo.

Questionados sobre quem era o culpado, cada um deles respondeu:

Armando: "Sou inocente."

Carlos: "O Eduardo é o culpado."

Eduardo: "O Daniel é o culpado."

Bernardo: "O Armando disse a verdade."

Daniel: "O Carlos mentiu."

Sabendo que apenas um dos suspeitos mentiu e que todos os outros disseram a verdade, quem é o culpado?

desafio 4

“O Ernesto tem mais de mil livros”, diz o Alberto.

“Não tem”, diz o Jorge, “tem menos que isso.”

“Certamente, tem pelo menos um livro”, diz a Henriqueta.

Se apenas uma das afirmações é verdadeira, quantos livros tem o Ernesto?

desafio 5

Temos 3 caixas, uma com bolas brancas, outra com bolas pretas e a terceira com bolas brancas e bolas pretas.

Temos 3 etiquetas que dizem: “Bolas brancas”, “Bolas pretas” e “Bolas brancas e pretas”.

As etiquetas estão coladas nas caixas mas nenhuma está colada na caixa correspondente.

Qual o número mínimo de bolas que temos de retirar das caixas para colocar as etiquetas corretamente?

preliminares de lógica

Preliminares de lógica

O que é a matemática?

Teorias Matemáticas envolvem:

- construção de objetos matemáticos;
- formação de relações entre esses objetos;
- a pesquisa daquelas relações que são verdadeiras (i.e., demonstrações dos Teoremas)

Para provar os seus resultados a matemática usa um processo de raciocínio que se baseia na **lógica**.

lógica: o que é?

Do grego "*logos*" que significa *sentença*, *razão*, *regra*...

A lógica é o estudo dos princípios do raciocínio correto:

- Análise dos métodos de raciocínio;
- Interesse na forma dos argumentos, não no seu conteúdo.

A tarefa da lógica é fundamentalmente a formalização e análise do método de raciocínio.

Exemplo:

Situação 1: Todos os que estão nesta sala gostam de Matemática. Eu estou nesta sala. Então, eu gosto de Matemática.

Situação 2: Todos os coelhos comem cenouras. Este animal é um coelho. Então, este animal come cenouras.

Formalmente, o raciocínio das duas situações é o mesmo.

Linguagem

Para exprimir argumentos precisos e rigorosos sobre afirmações é indispensável uma linguagem simples, clara, na qual as afirmações efetuadas não tenham significado ambíguo.

A linguagem corrente não tem estes requisitos:

- “Não fiz nada.”
- “Não gostas de mim?”– perguntei. “Não.” – respondeu ele.

É necessário utilizar uma **linguagem formal**.

A construção de uma linguagem formal exige uma *Sintaxe* e uma *Semântica*.

A **Sintaxe** é o conjunto de regras para escrita e manipulação de afirmações. No aspeto sintático, uma linguagem formal permite construir demonstrações e refutações - Teoria da Dedução; interessa a interligação das afirmações de acordo com regras de inferência.

A **Semântica** é a tradução do significado das afirmações através da sua interpretação numa estrutura. No aspeto semântico, uma linguagem formal permite exprimir propriedades da estrutura e determinar quando é verdadeira uma afirmação numa dada estrutura - Teoria de Modelos; interessa o significado intrínseco das afirmações.

Linguagem lógica mais simples: **cálculo proposicional**.

Cálculo proposicional

Sintaxe

proposições simples: frases com um verbo e um sujeito, na afirmativa, sem variáveis. Representam-se por letras (p, q, r, ...)

conectivos (ou operadores):

$\sim$ ou $\neg$ – negação

$\wedge$ – conjunção

$\vee$ – disjunção

$\Rightarrow$ ou $\rightarrow$ – implicação

$\Leftrightarrow$ ou $\leftrightarrow$ – equivalência

símbolos auxiliares:

( ) – parêntesis

fórmulas proposicionais ou proposições compostas: sequências de símbolos do alfabeto construídas de acordo com certas regras.

Como? Dadas as proposições p e q escrevemos:

$\sim p$ (lê-se *não p*);

$p \wedge q$ (lê-se *p e q*);

$p \vee q$ (lê-se *p ou q*);

$p \Rightarrow q$ (lê-se *se p então q*);

$p \Leftrightarrow q$ (lê-se *p se e só se q*).

O significado destes conectivos tem de ser rigorosamente definido.

Semântica

O aspeto semântico do cálculo proposicional parte da noção de **verdade**.

A definição de valores de verdade envolve 2 objetos: **F** (falso) e **V** (verdadeiro).

O objetivo é estudar a verdade das proposições compostas a partir da verdade das proposições simples que as compõe e do significado dos conectivos.

Representamos os conectivos através de **funções de verdade**:

Seja $B = \{V, F\}$. Dado $n \in \mathbb{N}$, chama-se **função de verdade** ***n*-ária** a qualquer aplicação de B^n em B.

Observação: No caso do cálculo proposicional, vamos estudar funções de verdade unárias e binárias:

$$B \to B \qquad e \qquad B \times B \to B.$$

– função de verdade unária da negação

$$\sim : B \to B \qquad \begin{array}{c|c} x & \sim x \\ \hline V & F \\ F & V \end{array}$$

– função de verdade binária da conjunção

$$\wedge : B \times B \to B$$

x	y	$x \wedge y$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

– função de verdade binária da disjunção

$$\vee : B \times B \to B$$

x	y	$x \vee y$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

– função de verdade binária da implicação

$$\Rightarrow: B \times B \to B$$

x	y	$x \Rightarrow y$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

– função de verdade binária da equivalência

$$\Leftrightarrow: B \times B \to B$$

x	y	$x \Leftrightarrow y$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

As tabelas que representam as funções de verdade dizem-se **tabelas de verdade**.

Como valorar as proposições?

Seja S o conjunto das proposições simples. Chama-se **valoração simples** a qualquer aplicação v de S em $B = \{V, F\}$

$$\begin{aligned} v: \quad & S \rightarrow B \\ & p \mapsto v(p) \end{aligned}$$

Pode-se estender uma valoração simples a qualquer proposição composta de modo que o significado dos conectivos seja respeitado.

Teorema.

Sejam P o conjunto de todas as proposições de uma linguagem, S o conjunto de todas as suas proposições simples e $v : S \to B$ uma valoração simples. Então, existe uma e uma só valoração $\overline{v} : P \to B$ tal que:

1. Para qualquer $p \in S$, $\overline{v}(p) = v(p)$;

2. Para quaisquer $a, b \in P$,

$$\overline{v}(a \wedge b) = \begin{cases} V & se\ \overline{v}(a) = \overline{v}(b) = V \\ F & caso\ contrário \end{cases} ;$$

3. Para quaisquer $a, b \in P$,

$$\overline{v}(a \vee b) = \begin{cases} F & se\ \overline{v}(a) = \overline{v}(b) = F \\ V & caso\ contrário \end{cases} ;$$

4. Para quaisquer $a, b \in P$,

$$\overline{v}(a \Rightarrow b) = \begin{cases} F & se\ \overline{v}(a) = V\ e\ \overline{v}(b) = F \\ V & caso\ contr\acute{a}rio \end{cases} ;$$

5. Para quaisquer $a, b \in P$,

$$\overline{v}(a \Leftrightarrow b) = \begin{cases} V & se\ \overline{v}(a) = \overline{v}(b) \\ F & se\ \overline{v}(a) \neq \overline{v}(b) \end{cases} ;$$

6. Para qualquer $a \in P$,

$$\overline{v}(\sim a) = \begin{cases} F & se\ \overline{v}(a) = V \\ V & se\ \overline{v}(a) = F \end{cases} .$$

$\overline{v}$ diz-se uma **valoração total** que estende v.

Consequência imediata do Teorema: Cada fórmula tem uma e uma só valoração.

Exemplo: Queremos estudar a valoração da proposição composta $(p \wedge (q \vee p)) \Rightarrow \sim q$.

Esta proposição tem duas proposições simples, p e q, pelo que a tabela que vamos construir tem 4 linhas, que corresponde ao número de combinações possíveis das valorações das duas proposições.

p	q	$q \vee p$	$p \wedge (q \vee p)$	$\sim q$	$(p \wedge (q \vee p)) \Rightarrow (\sim q)$
V	V	V	V	F	F
V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V
F	F	F	F	V	V

Analisando a tabela, podemos concluir que a proposição $(p \wedge (q \vee p)) \Rightarrow \sim q$ é falsa se p e q são ambas verdadeiras e é verdadeira caso contrário.

O cálculo proposicional é uma **lógica bivalente**, pois temos 2 princípios:

Princípio da não contradição: Uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa.

Princípio do 3º excluído: Uma proposição ou é verdadeira ou é falsa.

Tautologias e contradições

Uma **tautologia** é uma fórmula proposicional cuja valoração total é V quaisquer que sejam as valorações das proposições simples que a definem.

Exemplo: As proposições $p \vee \sim p$ ou $p \Rightarrow p$ são tautologias.

O conceito de tautologia permite-nos definir **fórmulas logicamente equivalentes**: p e q dizem-se fórmulas logicamente equivalentes se $p \Leftrightarrow q$ é uma tautologia.

Exemplo: A fórmula $(p \wedge (q \vee p)) \Rightarrow \sim q$ é logicamente equivalente à fórmula $\sim (p \wedge q)$, pois

$$((p \wedge (q \vee p)) \Rightarrow \sim q) \Leftrightarrow (\sim (p \wedge q))$$

é uma tautologia.

Uma **contradição** é uma fórmula proposicional cuja valoração total é F quaisquer que sejam as valorações das proposições simples que a definem.

Exemplo: As proposições $p \Leftrightarrow \sim p$ e $p \wedge \sim p$ são contradições.

Tautologias importantes

1. $p \vee \sim p$;
2. $\sim (p \wedge \sim p)$;
3. $p \Rightarrow p$;
4. $p \Leftrightarrow (p \vee p)$;
   $p \Leftrightarrow (p \wedge p)$; (idempotência)
5. $\sim\sim p \Leftrightarrow p$; (dupla negação)
6. $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$;
   $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$;
   $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$; (comutatividade)

7. $(p \vee (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \vee r)$;
   $(p \wedge (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r)$; (associatividade)

8. $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$;
   $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$; (distributividade)

9. $p \Leftrightarrow (p \vee F)$; (identidade para a disjunção)
   $p \Leftrightarrow (p \wedge V)$; (identidade para a conjunção)

10. $V \Leftrightarrow (p \vee V)$; (elemento absorvente para a disjunção)
    $F \Leftrightarrow (p \wedge F)$; (elemento absorvente para a conjunção)

11. $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$;
    $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$; (leis de De Morgan)

12. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$;
    $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$;

13. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$;
    $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \Leftrightarrow \sim q)$;

14. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$; (lei do contra-reíproco)

15. $p \Rightarrow (p \vee q)$;

16. $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$; (Modus Ponens - modo de afirmar)

17. $((p \Rightarrow q) \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$; (Modus Tollens - modo de negar)

18. $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$. (transitividade)

Exemplo: Usando tautologias, pretende-se simplificar a proposição

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge (\sim q)).$$

$$\begin{aligned}
(p \wedge q) \vee (p \wedge (\sim q)) &\iff p \wedge (q \vee \sim q) && (\textit{distributividade}) \\
&\iff p \wedge V && (\textit{taut. } 1) \\
&\iff p && (\textit{elt.}^{o} \textit{ neutro})
\end{aligned}$$

Condições

Conceitos básicos

No raciocínio matemático, é muitas vezes necessário fazer afirmações sobre valores/elementos não concretos que são representados por letras às quais chamamos **variáveis**.

Exemplo: x é um número primo.

Notação: Representamos afirmações como esta por $p(x)$.

Esta notação simplifica a notação para a concretização da variável:

$p(7)$: 7 é um número primo;

$p(8)$: 8 é um número primo.

Se uma afirmação contém variáveis, não podemos, muitas vezes, dizer que é verdadeira ou que é falsa. A sua valoração depende da concretização das variáveis. A esta afirmação chamamos **condição** ou **expressão proposicional** e ao conjunto das possíveis concretizações da variável chamamos **domínio da variável**.

Exemplo: "$x \geq 5''$ é uma condição.

É verdadeira? É falsa?

Concretizemos a variável x: por exemplo, $x = 4$.

Da condição "$x \geq 5''$ obtemos a proposição $4 \geq 5$.

$4 \geq 5$ é uma proposição falsa.

Classificação de condições

Condição impossível é uma condição que se transforma numa proposição falsa qualquer que seja a concretização da variável (ou variáveis) no seu domínio.

Exemplo: $p(x): \ x^2 < 0$ é uma condição impossível em $\mathbb{R}$.

Condição possível é uma condição que não é impossível.

Exemplo: $q(x): \ x^2 > 0$ é uma condição possível.

Condição universal é uma condição que se transforma numa proposição verdadeira qualquer que seja a concretização da variável (ou variáveis) no seu domínio.

Exemplo: $r(x): \ x^2 \geq 0$ é uma condição universal em $\mathbb{R}$.

$q(x): \ x^2 > 0$ não é uma condição universal em $\mathbb{R}$.

Operações lógicas com condições

Conectivos

Os conectivos lógicos que definimos para as proposições estendem-se naturalmente às condições.

Assim, se $p(x)$ e $q(x)$ são condições,

$$p(x) \wedge q(x), \;\; p(x) \vee q(x), \;\; \sim p(x), \;\; p(x) \Rightarrow q(x) \text{ e } p(x) \Leftrightarrow q(x)$$

são condições.

As propriedades dos conectivos transmitem-se, automaticamente, aos conectivos entre condições.

Exemplo: $p(x) \wedge (q(x) \wedge r(x)) \Longleftrightarrow (p(x) \wedge q(x)) \wedge r(x)$.

Quantificação de condições

As **quantificações universal** e **existencial** são duas operações lógicas que se aplicam unicamente a condições.

Quantificação universal

$\forall x,\ p(x)$ (qualquer que seja x, x satisfaz $p(x)$)

$\forall$ - quantificador universal

O símbolo $\forall$ (lê-se *qualquer que seja*) transforma a condição $p(x)$ na proposição $\forall x, p(x)$.

Exemplo:

$p(x)$: x é primo – condição

$\forall x \in \mathbb{N},\ x$ é primo – proposição falsa

$\forall x \in \{2, 3, 5, 7, 11\},\ x$ é primo – proposição verdadeira

Quantificação existencial

$\exists x : \ p(x)$ (existe algum x tal que x satisfaz $p(x)$) (para algum x, x satisfaz $p(x)$)

$\exists$ - quantificador existencial

O símbolo $\exists$ (lê-se *existe algum*) transforma a condição $p(x)$ na proposição $\exists x : p(x)$.

Exemplo:

$p(x)$: x é primo – condição

$\exists x \in \mathbb{N} : \ x$ é primo – proposição verdadeira

$\exists x \in \{2, 3, 5, 7, 11\} : \ x$ é primo – proposição verdadeira

$\exists x \in \{2, 4, 8, 11\} : \ x$ é primo – proposição verdadeira

$\exists x \in \{4, 8, 9\} : \ x$ é primo – proposição falsa

Existência e Unicidade: o símbolo $\exists^1$ (lê-se *existe um e um só*) é mais restritivo que o símbolo $\exists$.

Exemplo:

$p(x): \ x$ é primo – condição

$\exists x \in \mathbb{N}: \ x$ é primo – proposição verdadeira

$\exists^1 x \in \mathbb{N}: \ x$ é primo – proposição falsa observações importantes:

1 - Quando quantificamos uma condição, a variável (ou variáveis) quantificada(s) torna(m)-se *muda(s)*.

Exemplo:

$x + y = 5$ – condição

$\forall x,\ x + y = 5$ – condição (x é muda)

$\forall y \forall x,\ x + y = 5$ – proposição falsa

2 - Os quantificadores universal e existencial podem ser combinados para quantificar uma mesma condição. Quando uma condição tem duas ou mais variáveis, a valoração da proposição obtida pela quantificação de todas as variáveis depende da ordem dessas quantificações.

Exemplo:

$\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 5$ – proposição verdadeira

$\exists y \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{Z},\ x + y = 5$ – proposição falsa

3 - Quando quantificamos duas variáveis com o mesmo quantificador, a ordem é indiferente. Neste caso, simplificamos a escrita.

Exemplo:

$\exists x, y \in \mathbb{Z} : x + y = 5$ – proposição verdadeira

$\forall x, y \in \mathbb{Z},\ x + y = 5$ – proposição falsa

Negação de proposições quantificadas

$\sim (\forall x, \ , p(x))$ é logicamente equivalente a $\exists x :\sim p(x)$.

Exemplo: Negar que *"Todos os que estão nesta sala gostam de Matemática."* é afirmar que *"Existe alguém nesta sala que não gosta de Matemática."*.

$\sim (\exists x : p(x))$ é logicamente equivalente a $\forall x, \ \sim p(x)$.

Exemplo: Negar que *"Alguém que está nesta sala vai reprovar a Tópicos de Matemática."* é afirmar que *"Todos os que estão nesta sala não vão reprovar a Tópicos de Matemática."*.

$$\left.\begin{array}{c} \sim (\forall x, \ , p(x)) \Longleftrightarrow \exists x :\sim p(x) \\ \sim (\exists x : p(x)) \Longleftrightarrow \forall x, \ \sim p(x) \end{array}\right\} \textbf{Segundas Leis de De Morgan}$$

Exemplos de proposições quantificadas

$\forall x, y \in \mathbb{Z},\ x + y = y + x$ – propriedade comutativa da adição de inteiros relativos

$\forall x, y, z \in \mathbb{Z},\ (x + y) + z = x + (y + z)$ – propriedade associativa da adição de inteiros relativos

$\exists x_0 \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z},\ y + x_0 = x_0 + y = y$ – existência de elemento neutro para a adição de inteiros relativos ($x_0 = 0$)

$\forall x \in \mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{Z} :\ y + x = x + y = 0$ – existência de simétrico para cada um dos inteiros relativos (para cada x, consideramos $y = -x$).

Definições básicas

Um **Argumento** é uma sequência finita de fórmulas $p_1, p_2, ..., p_n, q$ sob a forma

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \Rightarrow q.$$

Também escrevemos

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline q \end{array}$$

Às fórmulas $p_1, p_2, ..., p_n$ chamamos **permissas** ou **hipóteses** e à fórmula q chamamos **conclusão**.

Se sempre que p_1, p_2, ..., p_n foram verdadeiras, q é verdadeiro, o argumento diz-se **logicamente válido** ou **correcto**.

Exemplo:

$$\begin{array}{l} a \Rightarrow b \\ \sim b \\ \hline \sim a \end{array}$$ é um argumento válido.

Se tivermos todas as fórmulas p_1, p_2, ...,p_n verdadeiras e q falsa, o argumento diz-se **logicamente inválido**, **incorrecto** ou **falacioso**.

Exemplo:

$$\begin{array}{l} a \Rightarrow b \\ \sim a \\ \hline \sim b \end{array}$$ é um argumento falacioso.

Exemplo: 2=1

$$
\begin{aligned}
a = b \quad & \Rightarrow a^2 = ab \\
& \Rightarrow a^2 - b^2 = ab - b^2 \\
& \Rightarrow (a+b)(a-b) = b(a-b) \\
& \Rightarrow a + b = b \\
& \Rightarrow b + b = b \\
& \Rightarrow 2b = b \\
& \Rightarrow 2 = 1
\end{aligned}
$$

Por que é que este argumento é falacioso?

Em Matemática, os teoremas são formulados de muitos modos diferentes. Os mais comuns são do tipo

$$p \Rightarrow q \text{ e } p \Leftrightarrow q.$$

São também comuns os enunciados que envolvem quantificadores. De seguida apresentamos algumas estruturas de demonstração de teoremas.

1. Provar que $p \Rightarrow q$ é verdadeiro

a pelo **método da prova direta**

Supomos que p é verdadeira e mostramos que, com este pressuposto, a proposição q é verdadeira.
Repare-se que se p é falsa, a implicação é automaticamente verdadeira.

Exemplo: Queremos provar que *todo o número inteiro ímpar se escreve como a diferença de 2 quadrados perfeitos, i.e., se $n \in \mathbb{Z}$ é um inteiro ímpar, então, existem $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que $n = a^2 - b^2$.*

Suponhamos que $n \in \mathbb{Z}$ é um inteiro ímpar.

Então, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k + 1$.

Como $2k + 1 = k^2 + 2k + 1 - k^2 = (k + 1)^2 - k^2$, concluímos que $n = (k + 1)^2 - k^2$ onde $k + 1$ e k são números inteiros.

1. Provar que $p \Rightarrow q$ é verdadeiro

b pelo **método do contrarrecíproco**

Para demonstrarmos que $p \Rightarrow q$ basta-nos provar que $\sim q \Rightarrow \sim p$, pois já vimos que as 2 fórmulas são logicamente equivalentes.
Para provar que $\sim q \Rightarrow \sim p$ usamos o método da prova direta.

Exemplo: Queremos provar que *Se x e y são dois números inteiros tais que $x + y$ é par, então, x e y têm a mesma paridade.*

Suponhamos que x e y **não** têm a mesma paridade.

Então um deles é par e o outro ímpar. Suponhamos, sem perda de generalidade, que x é ímpar e y é par.

Então, $x = 2k_1 + 1$ e $y = 2k_2$.
Logo, $x + y = (2k_1 + 1) + 2k_2 = 2(k_1 + k_2) + 1$, que é claramente um número ímpar.

1. Provar que $p \Rightarrow q$ é verdadeiro

c pelo **método de redução ao absurdo**

Neste método de prova, assumimos, juntamente com p, a negação de q e obtemos algum tipo de contradição.

Exemplo: Queremos provar que *se* $x \in \mathbb{R}$ *é tal que* $x^2 = 2$ *então* $x \notin \mathbb{Q}$.

Suponhamos que $x = \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Então, $x = \sqrt{2} = \frac{m}{n}$ onde m e n são inteiros positivos tais que m.d.c.$(m, n) = 1$.

Então, $2 = x^2 = \frac{m^2}{n^2}$, pelo que $2n^2 = m^2$.

Então, m é um número par, i.e., $m = 2k$, para algum inteiro k.

Então, temos que $4k^2 = 2n^2$, i.e., $2k^2 = n^2$.

Então, n é um número par.

Logo, 2 é um divisor comum de m e n, o que contradiz o facto de m.d.c.$(m, n) = 1$.

A contradição surgiu por supormos que $x^2 = 2$ e que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ aconteciam simultaneamente. Logo, estamos em condições de concluir que se $x^2 = 2$, então $x \notin \mathbb{Q}$.

Importante. A diferença entre o método de contrarrecíproco e o método de redução ao absurdo para provar que $p \Rightarrow q$ é subtil. No primeiro, supomos $\sim q$ e provamos $\sim p$. No segundo, supomos $\sim q$ e p e encontramos um absurdo qualquer.

2. Provar que $p \Rightarrow q$ é falsa.

   Para provarmos que uma dada afirmação é falsa, basta apresentarmos um exemplo de uma situação em que a afirmação não se verifica - a este exemplo chama-se **contraexemplo**. Neste caso, para provar que $p \Rightarrow q$ é falsa basta apresentar um exemplo onde a permissa p é verdadeira e a conclusão q é falsa.

   Exemplo: Queremos provar que a afirmação "$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$" é falsa.

   Para isso, basta observar que, se $x = -1$, então $x^2 = 1$ e que $x \neq 1$.

3. Provar que $p \Rightarrow a \wedge b$ é verdadeira.
   Basta provar que $p \Rightarrow a$ e $p \Rightarrow b$ são verdadeiras.

4. Provar que $p \Rightarrow a \vee b$ é verdadeira.

   Suponhamos que p é verdadeira. Se a é verdadeira, então, $a \vee b$ é verdadeira e, portanto, a implicação é verdadeira. Se a é falsa, temos de provar que b é verdadeira.

   Assim, provar que $p \Rightarrow a \vee b$ é verdadeira é o mesmo que provar que $p \wedge \sim a \Rightarrow b$ é verdadeira.

   Exemplo: Queremos provar o seguinte resultado: *Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Se $xy = 0$ então $x = 0$ ou $y = 0$.*

   Suponhamos que $xy = 0$ e que $x \neq 0$. Então,

$$xy = 0 \Rightarrow x^{-1}xy = 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

5. Provar que $p \Leftrightarrow q$ é verdadeira.

A condição $p \Leftrightarrow q$ é também conhecida como *condição necessária e suficiente*.

$p \Rightarrow q$ significa que sempre que p acontece, também acontece q. É considerada a condição suficiente.

Também podemos afirmar que q só acontece se acontecer p. Assim, para além de ser suficiente, p é também necessária para que q aconteça. Logo, temos $q \Rightarrow p$.

$$
\begin{array}{cc}
p \Leftrightarrow q & p \text{ se e só se } q \\
\begin{cases} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow p \end{cases} & \begin{array}{c} \mathsf{q} \text{ se } p \\ \mathsf{q} \text{ só se } p \end{array}
\end{array}
$$

Assim, provar uma equivalência é provar um dupla implicação.

Exemplo: Queremos provar que: *Dado um natural n, n^2 é ímpar se e só se n é ímpar.*

Suponhamos primeiro que n é ímpar. Então, n^2 é o produto de dois números ímpares que sabemos ser um número ímpar. Provámos, assim, que

$$n \text{ ímpar } \Rightarrow n^2 \text{ ímpar.}$$

Vamos provar que

$$n^2 \text{ ímpar } \Rightarrow n \text{ ímpar}$$

por contrarrecíproco. Suponhamos que n não é ímpar. Então, n é par. Logo, n^2 é um número par pois é o produto de dois números pares. Estamos em condições de concluir que n^2 não é um número ímpar.

6. Provar que $\forall x, \exists y : p(x, y)$ é verdadeira.

Fixa-se x_0 no domínio de x. Prova-se que existe y_1 no domínio de y tal que $p(x_0, y_1)$ é verdadeira.

Observação: Há demonstrações onde é relativamente fácil escolher y_1 em função de x_0. Noutros casos provamos apenas que y_1 existe, sem o especificar.

Exemplo: Queremos provar que *Dado um número real qualquer x, existe um inteiro z tal que $z \leq x \leq z + 1$.*

Seja $x \in \mathbb{R}$. Então, a característica de x, $[x]$, é, por definição, um inteiro relativo tal que $[x] \leq x \leq [x] + 1$. Logo, basta considerar $z = [x]$.

7. Provar que $\exists x : \forall y, p(x, y)$ é verdadeira.

Caso seja possível, determinamos x_0 no domínio de x para o qual $p(x_0, y)$ é verdadeira independentemente do valor de y.

Tal como no caso anterior, há demonstrações onde apenas conseguimos provar que tal x_0 existe, sem o especificar.

Exemplo: Queremos provar que

$$\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R}, xy + x - 4 = 4y.$$

Seja $x = 4$. Então, para qualquer $y \in \mathbb{R}$, $xy + x - 4 = 4y + 4 - 4 = 4y$. Logo, a condição é satisfeita, independentemente do valor de y.

8. Provar que $\exists^1 x : p(x)$ é verdadeira.

Temos de provar:

- a existência de x (o raciocínio é análogo aos anteriores);

- a unicidade de x (supondo que existem a e b nas condições do enunciado, temos de concluir que $a = b$).

Exemplo: Queremos provar que

$$\exists^1 x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R}, xy + x - 4 = 4y.$$

Existência. Seja $x = 4$. Então, para qualquer $y \in \mathbb{R}$, $xy + x - 4 = 4y + 4 - 4 = 4y$. Logo, a condição é satisfeita, independentemente do valor de y.

Unicidade. Suponhamos que existe $a \in \mathbb{R}$ nas mesmas condições de $x = 4$. Então, $ay + a - 4 = 4y$, para qualquer $y \in \mathbb{R}$. Em particular, para $y = 0$, temos que

$$a \times 0 + a - 4 = 4 \times 0,$$

i.e.,

$$a = 4.$$