Introdução à Lógica

Cálculo Proposicional

Proposição: afirmação que pode ser verdadeira ou falsa.

Ex.:
"Hoje é segunda-feira." (V)
"Amanhã será quinta-feira." (F)
"Hoje à noite vai chover." (?; ainda não sabemos)

Nem todas as frases são proposições.
Ex.:
"Bom dia."
"Como te chamas?"
"Ótimo!"

Proposições compostas

"Amanhã vai chover e (amanhã) vai estar frio."

"Se amanhã estiver frio, (então) vou trazer um casaco."

Conetivos:

negação	(não)	$\sim$
conjunção	(e)	$\wedge$
disjunção	(ou)	$\vee$
implicação	(se…então…)	$\rightarrow$
equivalência	(se e só se)	$\leftrightarrow$

[Nota: em muitos livros, a *negação* é representada por $\neg$;
noutros, a *implicação* é representada por $\Rightarrow$ e a *equivalência* por $\Leftrightarrow$.]

Se p representar a afirmação atómica "n é ímpar"
e q representar a afirmação atómica "n é primo",

$\sim p$ representará "n é par"

$p \wedge q$ representará "n é ímpar e primo"

$p \vee q$ representará "n é ímpar ou primo"

$p \rightarrow q$ representará "se n é ímpar então é primo"

$p \leftrightarrow q$ representará "n é ímpar se e só se é primo"

Valores lógicos:
verdadeiro (V) e falso (F)

[em muitos livros, 1 em vez de V e 0 em vez de F]

p	$\sim p$
V	F
F	V

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Fórmulas proposicionais

1. $p, p_0, p_1, p_2, \ldots, q, q_0, q_1, \ldots, r, r_0, r_1, \ldots$ (chamadas *variáveis proposicionais*) são fórmulas proposicionais
2. se φ for uma fórmula proposicional, $(\sim\varphi)$ também será
3. se φ e ψ forem fórmulas proposicionais,
   3.1 $(\varphi \wedge \psi)$,
   3.2 $(\varphi \vee \psi)$,
   3.3 $(\varphi \rightarrow \psi)$ e
   3.4 $(\varphi \leftrightarrow \psi)$

   também serão fórmulas proposicionais

Ex.:
p e q são fórmulas proposicionais (1),
logo $(\sim q)$ também é (2),
$(p \vee q)$ também é (3.2)
e $((\sim q) \rightarrow (p \vee q))$ também é uma fórmula proposicional (3.3)

Para simplificar, é habitual omitir os parênteses:

- à volta das negações
- exteriores

Assim, escreveremos $\sim q \rightarrow (p \vee q)$ em vez de $((\sim q) \rightarrow (p \vee q))$.

[Mas se aplicarmos a regra 2 a $\sim q \rightarrow (p \vee q)$ ficaremos com $\sim(\sim q \rightarrow (p \vee q))$.]

Tabelas de verdade

Quando é que $\sim q \rightarrow (p \vee q)$ é verdadeira?

p	q	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim q \rightarrow (p \vee q)$
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
F	V	F	V	V
F	F	V	F	F

O número de linhas na tabela de verdade de uma fórmula é 2^n, onde n é o número de variáveis proposicionais que ocorrem nessa fórmula

Tautologia: fórmula proposicional que é sempre verdadeira, quaisquer que sejam os valores lógicos das variáveis proposicionais.

Contradição: fórmula proposicional que é sempre falsa, quaisquer que sejam os valores lógicos das variáveis proposicionais.

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

$p \rightarrow (p \vee q)$ é uma tautologia

Substituição: se φ e ψ forem duas fórmulas e t uma variável proposicional, $\varphi[\psi/t]$ ("φ com ψ em vez de t") é a fórmula que resulta de substituir em φ todas as ocorrências de t por ψ.

Se $\varphi = \sim q \rightarrow (p \vee q)$ e $\psi = p \wedge r$, então
$\varphi[\psi/q] = \sim(p \wedge r) \rightarrow (p \vee (p \wedge r))$.

Se φ for uma tautologia, então $\varphi[\psi/t]$ também será tautologia
e se φ for uma contradição, então $\varphi[\psi/t]$ também será contradição.

Como $p \rightarrow (p \vee q)$ é uma tautologia, qualquer fórmula da forma
$\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$ é uma tautologia
(por exemplo, $(p \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow r) \vee \sim q)$ é uma tautologia).

Dadas duas fórmulas φ, ψ,
se $\varphi \leftrightarrow \psi$ for uma tautologia, dizemos que φ e ψ são **semanticamente equivalentes** e escrevemos $\varphi \Leftrightarrow \psi$.

Algumas equivalências semânticas

- associatividade:
  $(\varphi \vee \psi) \vee \sigma \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma)$ e $(\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$
- comutatividade:
  $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi$ e $\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$
- leis de De Morgan:
  $\sim(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \sim\varphi \wedge \sim\psi$ e $\sim(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \sim\varphi \vee \sim\psi$
- dupla negação:
  $\sim(\sim\varphi) \Leftrightarrow \varphi$
- $\varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \sim\varphi \vee \psi$
- $\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$

Analogamente, dadas duas fórmulas φ, ψ,
se $\varphi \to \psi$ for uma tautologia escreveremos $\varphi \Rightarrow \psi$

Assim, já vimos que $p \Rightarrow (p \vee q)$.

Nota:
$p \to (p \vee q)$ é uma fórmula proposicional, que representa múltiplas proposições (dependentes das proposições que fizermos representar por p e q);
$p \Rightarrow (p \vee q)$ é uma proposição, que diz que sempre que p representar uma proposição verdadeira $p \vee q$ também representa uma proposição verdadeira.

Alguns métodos de prova

Seja $f(n) = n^2 - n + 41$

$f(1) = 41$ é primo

$f(2) = 43$ é primo

$f(3) = 47$ é primo

$f(4) = 53$ é primo

$\dots$

$f(40) = 1601$ é primo

O que se pode concluir?

Nada!

($f(41) = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$ é obviamente composto.)

A matemática não é uma ciência experimental.

Para uma proposição ser aceite como verdadeira (**teorema**) tem de ser **provada** logicamente.

Em geral, os enunciados dos teoremas podem ser interpretados como implicações.

P. ex.:
"Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos."
Se a, b, c forem os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo e a for o lado maior, **então** $a^2 = b^2 + c^2$.

Às condições ("lado esquerdo" da implicação) chamamos **hipóteses**, ou **premissas**; ao que concluímos ("lado direito") chamamos **tese**, ou **conclusão**.

Prova direta de uma implicação

Para provar $P \Rightarrow Q$ (isto é, que $P \rightarrow Q$ é sempre verdade), podemos

1. supor que P é verdade;
2. usando P, tentar provar Q.

Prop.: Se x e y são números reais positivos tais que $x < y$, então $x^2 < y^2$.

Dem.: Suponhamos que x e y são números reais positivos e $x < y$.
[Nota 1: Isto não é, em geral, nem verdadeiro nem falso – depende dos valores de x e y; mas **supomos** que é verdadeiro.
Nota 2: Queremos, agora, provar que $x^2 < y^2$.]
De $x < y$, multiplicando em ambos os lados pelo número positivo x, concluímos que $x^2 < xy$.
Analogamente, multiplicando por y, vem que $xy < y^2$.
Logo, $x^2 < xy < y^2$. $\square$

Prova por contraposição

Para provar $P \Rightarrow Q$, podemos também

1. supor que $\sim Q$ é verdade;
2. usando $\sim Q$, tentar provar $\sim P$.

(Este método usa o facto de que $P \to Q \Leftrightarrow \sim Q \to \sim P$.)

Prop.: Seja n um número inteiro. Se n^2 é ímpar, então n é ímpar.

Dem.: Suponhamos que n é par.
Então $n = 2k$, para algum inteiro k.
Assim, $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ é par.
Por contraposição, se n^2 for ímpar, n terá de ser ímpar. $\square$

Redução ao absurdo

Para provar $P \Rightarrow Q$, podemos ainda

1. supor que P é verdade;
2. supor que $\sim Q$ é verdade;
3. usando P e $\sim Q$, tentar chegar a uma contradição, ou absurdo.

(Este método usa o facto de que $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \sim(P \wedge \sim Q)$.)

Prop.: Existe uma infinidade de números primos.

Dem.: Suponhamos, por absurdo, que existe apenas um número finito, n, de números primos.
Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_n$ esses números primos.
Seja $x = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n + 1$.
Ora, x não é divisível por p_1 (o resto da divisão é 1), nem por p_2,…nem por p_n;
logo x tem de ser divisível por algum primo que não está na lista $p_1, p_2, \ldots, p_n$, o que contraria a suposição de que existem apenas n números primos. $\square$

Predicados e quantificadores

Predicado: afirmação sobre um ou mais objetos (podem ser números, pessoas,...), que se torna verdadeira ou falsa quando esses objetos são concretizados

Ex.:

$P(x)$: "x é primo", onde a variável x representa números inteiros.

$P(5)$ é verdadeira; $P(6)$ é falsa

$M(x,y)$: "x é múltiplo de y", onde as variáveis x, y representam números inteiros.

$M(12,3)$ é verdadeira; $M(3,12)$ é falsa

$M(3,2) \vee M(4,2)$ é uma proposição verdadeira

Quantificador universal (∀)

Como escrever que

"todo o número inteiro é múltiplo de 1",

e que

"nem todo o número inteiro é primo"?

R.:

$$\forall_x M(x,1)$$

e

$$\sim \forall_x P(x)$$

$\forall_x$ pode ler-se "para todo o x", ou "todo o x é tal que", ou "qualquer que seja o x"

$\forall_x Q(x)$ é verdadeira se $Q(t)$ for verdadeira para todo o valor t do "universo de quantificação" (conjunto onde se assume que x toma os seus valores)

Quantificador existencial ($\exists$)

Como escrever que

"algum número inteiro é múltiplo de 5",

e que

"existe um número primo que é par"?

R.:

$$\exists_x M(x,5)$$

e

$$\exists_x (P(x) \wedge M(x,2))$$

$\exists_x$ pode ler-se "existe um x tal que", ou "para algum x", ou "algum x é tal que"

$\exists_x Q(x)$ é verdadeira se $Q(t)$ for verdadeira para algum valor t do universo de quantificação

Outros exemplos (onde o universo de quantificação é o dos números inteiros):

$\forall_n \left(\sim M(n,2) \leftrightarrow \sim M(n^2,2)\right)$

"para todo o n, n^2 é ímpar se e só se n é ímpar"
proposição verdadeira (exerc. 20.)

$\forall_n \left(M(n,2) \vee P(n)\right)$

"todo o número inteiro é par ou primo"
proposição falsa (por exemplo, $M(9,2) \vee P(9)$ é falsa)

$\exists_n \, n = 2n$

"existe um número inteiro que é igual ao seu dobro"
proposição verdadeira ($0 = 2 \times 0$)

$\exists_n \, n^2 = -1$

"-1 é o quadrado de algum número inteiro"
proposição falsa (o quadrado de qualquer número inteiro é positivo ou zero)

Negação de quantificações

$$\sim \forall_x Q(x) \Leftrightarrow \exists_x \sim Q(x)$$

$$\sim \exists_x Q(x) \Leftrightarrow \forall_x \sim Q(x)$$

Ex.:

Dizer que "nem todo o número inteiro é primo" é equivalente a dizer que "existe um número inteiro que não é primo";
e dizer que "não existe nenhum número divisível por zero" é equivalente a dizer que "qualquer que seja o número *x*, *x* não é divisível por zero".

Combinação de quantificadores

"x é múltiplo de y" (que representámos atrás por $M(x,y)$) significa

$\exists_k \, x = y \times k$

Assim, a afirmação "todo o número inteiro é múltiplo de 1" pode ser escrita como

$\forall_x \, \exists_k \, x = 1 \times k$

e, continuando a representar "x é primo" por $P(x)$, "existe um número primo que é par" pode ser escrita como

$\exists_x \, (P(x) \wedge \exists_k \, x = 2 \times k)$

Provas

Para provar que $\forall_x Q(x)$ é verdade, podemos

1. tomar um elemento genérico t do universo de quantificação; e
2. provar que $Q(t)$ é verdade.

Para provar que $\exists_x Q(x)$ é verdade, basta escolher um elemento específico t_0 para o qual $Q(t_0)$ seja verdade, e verificar que assim é. Este t_0 será um **exemplo**.

Para provar que $\forall_x Q(x)$ é falsa, basta escolher um elemento específico t_0 para o qual $Q(t_0)$ seja falsa, e verificá-lo.
A um tal t_0 chamamos um **contra-exemplo**.

Para provar que $\exists_x Q(x)$ é falsa, podemos

1. tomar um elemento genérico t do universo de quantificação; e
2. provar que $Q(t)$ é falsa.