Tópicos de Matemática

Lic. Ciências da Computação
2021/2022

1. Noções elementares de lógica

A prova da veracidade de uma determinada afirmação implica a construção de uma prova rigorosa. A lógica fornece as ferramentas adequadas para a construção destas provas, estudando os princípios e as técnicas do raciocínio, procurando definir linguagens formais que permitam representar de forma precisa e sem ambiguidade a linguagem natural e definindo regras que permitam a construção rigorosa e sistemática de argumentos que sejam válidos. A lógica desempenha um papel fundamental em qualquer área de aprendizagem, especialmente na área da matemática e em áreas associadas como é o caso das ciências da computação. Em ciências da computação, a lógica é utilizada, por exemplo, no desenvolvimento de linguagens de programação e na verificação da correção de programas.

Em lógica é essencial o rigor e a precisão, dai a necessidade de uma linguagem formal que permita representar de forma clara e sem ambiguidade a linguagem natural. Procurando definir uma linguagem formal com estes requisitos e um sistema que permita a construção de argumentos rigorosos, ao longo dos anos foram definidos diversos sistemas lógicos.

Um sistema lógico fica definido pelas seguintes componentes:

- **sintaxe** - conjunto de símbolos e regras de formação que definem as palavras, designadas por *fórmulas*, que podem ser utilizadas para representar de forma precisa, concisa e sem ambiguidade a linguagem natural (ou uma parte desta linguagem);

- **semântica** - conjunto de regras que associam um significado às fórmulas;

- **sistema dedutivo** - conjunto de fórmulas, designadas por *axiomas*, e de regras, designadas por *regras de inferência*, utilizados na construção de argumentos.

Nesta unidade curricular estudamos algumas noções básicas associadas a dois sistemas lógicos: o **Cálculo Proposicional** e o **Cálculo de Predicados**.

1.1 Cálculo Proposicional

A prova de um teorema consiste na demonstração da veracidade de certas afirmações, pelo que começamos o estudo da lógica por uma análise do tipo de frases relevantes neste estudo. Em linguagem natural podemos encontrar diversos tipos de frases - declarativas, exclamativas, interrogativas, imperativas. Porém, na construção de um argumento recorremos somente a frases declarativas.

As frases podem ser classificadas em simples ou compostas. Uma **frase declarativa simples** tem, gramaticalmente falando, um sujeito e um predicado.

Exemplo 1.1. *São exemplos de frases simples as seguintes:*

(1) Lisboa é a capital de Portugal.

(2) O João gosta de Lógica.

(3) Todo o número inteiro é par.

A partir de frases simples e recorrendo a palavras tais como "não", "e", "ou", "se ... então", "... se e só se ..."obtêm-se frases mais complexas designadas por **frases compostas**.

Exemplo 1.2. *As frases seguintes são exemplos de frases compostas:*

(1) Lisboa é a capital de Portugal e é a cidade do país com o maior número de habitantes.

(2) Se o João gosta de Lógica então é bom aluno a Tópicos de Matemática e a Lógica Computacional.

(3) Se todo o número inteiro é par, então 7 é divisível por 2.

1.2 Sintaxe

Nesta secção descreve-se a linguagem simbólica do Cálculo Porposicional que permite representar de forma concisa e sem ambiguidade uma parte da linguagem natural.

No Cálculo Proposicional, cada frase simples é encarada como um elemento indivisível, não se diferenciando partes da afirmação como o nome ou o verbo. Cada frase simples será representada por uma letra minúscula $p, q, r, s, ...$ (possivelmente com índices) - a estes símbolos damos a designação de **variáveis proposicionais**. Por sua vez, as frases compostas são representadas usando:

- as variáveis proposicionais;

- os símbolos $\perp, \neg, \wedge, \vee$ $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, chamados **conetivos proposicionais** e designados, respectivamente, por **absurdo**, **negação**, **conjunção**, **disjunção**, **implicação** e **equivalência**;

- os símbolos auxiliares "(" e ")".

Representando por p e q duas frases declarativas:

- a frase "não p" designa-se por **negação de** p e é representada por $(\neg p)$. A $(\neg p)$ também é possivel associar uma das seguintes leituras: "é falso p", "não é verdade p".
- a frase "p e q" é designada por **conjunção de** p **e** q e é representada por $(p \wedge q)$.
- a frase "p ou q" designa-se por **disjunção de** p **e** q e é representada por $(p \vee q)$.
- a frase "Se p, então q" designa-se por **implicação de** p, q e é representada por $(p \rightarrow q)$. A $(p \rightarrow q)$ também se associa uma das seguintes leituras: "p implica q", "p é suficiente para q", "q é necessário para p", "q se p", "q sempre que p", "p somente se q".
  A p dá-se a designação de **antecedente** ou **hipótese** da implicação e a q dá-se a designação de **consequente** ou **conclusão**.
- a conjunção das implicações "Se p então q" e "Se q então p" pode ser expressa por "p se e só se q". Esta última frase designa-se por **equivalência de** p e q e é representada por $(p \leftrightarrow q)$. A $(p \leftrightarrow q)$ também se associa uma das leituras:"p é equivalente a q", "p é necessário e suficiente para q".

Na representação de frases compostas podemos recorrer aos símbolos auxiliares "(" e ")", no sentido de evitar ambiguidade.

Exemplo 1.3. *Considerando que as seguintes frases simples são representadas pelas variáveis proposicionais a seguir indicadas*

p: *Lisboa é a capital de Portugal.*

q: *Lisboa é a cidade do país com o maior número habitantes.*

r: *O João gosta de Lógica.*

s: *O João é bom aluno a Tópicos de Matemática.*

t: *O João é bom aluno a Lógica Computacional.*

u: *Todo o número inteiro é par.*

v: *7 é divisível por 2.*

as frases compostas do exemplo anterior podem ser representadas, respetivamente, por:

(1) $(p \wedge q)$

(2) $(r \rightarrow (s \wedge t))$

(3) $(u \rightarrow v)$

Uma vez estabelecidos os símbolos que definem o alfabeto da linguagem do Cálculo Proposicional, podemos definir as palavras desta linguagem.

Definição 1.1. *O conjunto* $\mathcal{F}^{CP}$ *de* **fórmulas do Cálculo Proposicional**, *também designado por* **linguagem do Cálculo Proposicional**, *é o conjunto definido indutivamente pelas seguintes regras:*

(F_1) $\perp$ *é uma fórmula;*

(F_2) *toda a variável proposicional é uma fórmula;*

(F_3) *se* φ *é uma fórmula, então* $(\neg\varphi)$ *é uma fórmula;*

(F_4) *se* φ, ψ *são fórmulas, então* $(\varphi \wedge \psi)$ *é uma fórmula;*

(F_5) *se* φ, ψ *são fórmulas, então* $(\varphi \vee \psi)$ *é uma fórmula;*

(F_6) *se* φ, ψ *são fórmulas, então* $(\varphi \to \psi)$ *é uma fórmula;*

(F_7) *se* φ, ψ *são fórmulas, então* $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ *é uma fórmula.*

Exemplo 1.4.

(1) A palavra $((\neg p) \to (q \vee r))$ *é uma fórmula do Cálculo Proposicional, uma vez que:*

  i. p, q *e* r *são fórmulas, pela regra* (F_2) *da definição anterior ;*

  ii. $(\neg p)$ *é fórmula, por i. e pela regra* (F_3)*;*

  iii. $(q \vee r)$ *é fórmula, por i. e pela regra* (F_5)*;*

  iv. $((\neg p) \to (q \vee r))$ *é fórmula, por ii., iii. e pela regra* (F_6)*.*

(2) As palavras $\neg p$, $\neg(q)$, $p \vee r$ *não são fórmulas do Cálculo Proposicional.*

Para que uma palavra sobre o alfabeto do Cálculo Proposicional seja considerada uma fórmula, os parêntesis têm de ocorrer na palavra de acordo com as regras que definem o conjunto de fórmulas. Porém, para simplificação de escrita, é usual omitir os parêntesis extremos e os parêntesis à volta da negação. Além disso, usaremos a convenção de que os conetivos $\wedge$ e $\vee$ têm prioridade sobre os conetivos $\to$ e $\leftrightarrow$ e que o conetivo $\neg$ tem prioridade sobre qualquer um dos outros conetivos, o que permite simplificar um pouco mais a representação das fórmulas.

Exemplo 1.5.

(1) A palavra $\neg p \wedge q \to \neg r$ *será usada como representação da fórmula* $(((\neg p) \wedge q) \to (\neg r))$.

(2) A palavra $\neg(p \vee \neg q)$ *é uma representação da fórmula* $(\neg(p \vee (\neg q)))$, *mas* $\neg p \vee \neg q$ *não representa esta fórmula.*

(3) A fórmula $((p \wedge q) \vee r)$ *pode ser representada por* $(p \wedge q) \vee r$, *mas não pode ser representada por* $p \wedge q \vee r$.

1.3 Semântica

A sintaxe do Cálculo Proposicional não nos permite atribuir qualquer significado às fórmulas. Uma fórmula, por si só, não tem qualquer significado - este depende da interpretação associada aos símbolos.

Exemplo 1.6. *A fórmula $p \to q$ pode representar qualquer uma das afirmações seguintes*

> *"Se $2 \times 7 = 14$, então $1 + 2 \times 7 = 15$."*
>
> *"Se $2 \times 7 = 14$, então $1 + 2 \times 7 = 16$."*

sendo a primeira sentença uma afirmação verdadeira e a segunda uma afirmação falsa.

A semântica do Cálculo Proposicional consiste na atribuição de valores de verdade às fórmulas. Em lógica clássica são considerados dois valores de verdade.

Definição 1.2. *Os* **valores de verdade** *(ou* **valores lógicos***) do Cálculo Proposicional são* **verdadeiro** *($\mathbf{V}$ ou $\mathbf{1}$) e* **falso** *($\mathbf{F}$ ou $\mathbf{0}$).*

Em lógica interessa considerar frases declarativas sobre as quais se possa decidir sobre o seu valor lógico.

Definição 1.3. *Designa-se por* **proposição** *uma frase declarativa sobre a qual é possível dizer objetivamente se é verdadeira ou falsa (ainda que possamos não ser capazes de, no momento atual, determinar o seu valor lógico).*

No Cálculo Proposicional são adotados os dois princípios seguintes:

Princípio da não contradição
Uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa.

Princípio do terceiro excluído
Uma proposição ou é verdadeira ou é falsa.

Dos dois princípios anteriores resulta que toda a proposição tem um, e um só, dos valores lógicos "verdadeiro" ou "falso". Por este motivo, o Cálculo Proposicional diz-se uma **lógica bivalente**.

Exemplo 1.7. *Consideremos as frases seguintes:*

(1) Lisboa é a capital de Portugal.

(2) Que horas são?

(3) $2 + 3 = 6$.

(4) *Toma uma chávena de café.*

(5) *2+x=7.*

(6) *Esta frase é falsa.*

(7) *Todo o número maior ou igual a 4 pode ser escrito como a soma de dois números primos.*

(8) *2 é um número par e todo o número primo é ímpar.*

As frases (1), (3), (7) e (8) são proposições. A afirmação (1) é verdadeira e as afirmações (3) e (8) são falsas. A afirmação (7), conhecida por Conjetura de Goldbach, é uma proposição, pois, embora até ao momento não exista uma prova da sua veracidade ou da sua falsidade, será possível associar-lhe um e um só dos dois valores lógicos.

As frases (2), (4), (5) e (6) não são proposições. As frases (2) e (4) não são frases declarativas e, portanto, não é possível associar-lhes um dos valores lógicos. A frase (5) não é nem verdadeira nem falsa, uma vez que o valor de x é desconhecido. No caso da frase (6) não se consegue decidir se esta é verdadeira ou falsa (a atribuição do valor verdadeiro ou do valor falso a esta afirmação conduz a uma contradição - a uma afirmação deste tipo damos a designação de **paradoxo***).*

Uma proposição diz-se uma **proposição simples** se se trata de uma frase declarativa simples e diz-se uma **proposição composta** caso seja uma frase declarativa composta.

A decisão sobre o valor lógico de uma frase simples pode depender do contexto em que esta é considerada. Por exemplo, a afirmação "Este livro tem capa vermelha." pode ser verdadeira ou falsa, dependendo do livro em causa. A veracidade de uma frase composta pode também depender do contexto em que se insere, mas para avaliar se esta é verdadeira basta saber o que acontece com as frases simples que a compõem. A afirmação "Este livro está escrito numa língua estrangeira e tem uma capa vermelha."é verdadeira para alguns livros e falsa para outros, mas será verdadeira sempre que as afirmações simples que a compõem sejam verdadeiras. No Cálculo Proposicional não se pretende estudar o processo de determinar se uma proposição simples é ou não verdadeira, mas sim estabelecer regras que permitam determinar a veracidade das proposições compostas a partir da veracidade ou falsidade das proposições que a compõem e do significado dos conetivos que ligam estas mesmas proposições.

Estudamos de seguida o significado associado a cada um dos conetivos proposicionais referidos anteriormente. Esse mesmo significado pode ser expresso de forma clara através de tabelas designadas por **tabelas de verdade**. Uma tabela de verdade indica se uma proposição composta é verdadeira ou falsa para cada uma das combinações dos valores lógicos das proposições que a formam.

Dada uma proposição arbitrária φ, a sua negação tem um valor lógico contrário ao de φ. A relação entre o valor lógico de φ e o valor lógico de $\neg\varphi$ pode ser representado através da seguinte tabela de verdade:

φ	$\neg\varphi$
1	0
0	1

Exemplo 1.8.

(1) *A proposição "Todo o número primo é ímpar." é falsa. A sua negação, "Nem todo o número primo é ímpar.", é verdadeira (basta considerar o número primo 2).*

(2) *A proposição "24 é divisível por 8." é verdadeira. A sua negação, "24 não é divisível por 8." é falsa, uma vez que* $24 = 8 \times 3$.

Dadas duas proposições φ e ψ, a conjunção de φ e ψ é verdadeira somente se ambas as proposições que a compõem são verdadeiras. A tabela de verdade associada ao conetivo $\wedge$ é a seguinte:

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Exemplo 1.9.

(1) *A proposição "100 é divisível por 4 e 5 é um número primo." é verdadeira, pois ambas as proposições que compõem esta conjunção são verdadeiras.*

(2) *A afirmação "100 é divisível por 4 e 5 é um número par." é falsa, pois a proposição "5 é um número par." é falsa.*

Dadas duas proposições φ e ψ, a disjunção de φ e ψ é verdadeira se pelo menos uma das proposições que a compõem é verdadeira. O significado do conetivo $\vee$ é dado pela tabela seguinte:

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Exemplo 1.10.

(1) *A proposição "100 não é divisível por 4 ou 5 não é um número primo." é falsa, pois ambas as proposições que a compõem são falsas.*

(2) *A proposição "100 é divisível por 4 ou 5 é um número par." é verdadeira, pois uma das proposições desta disjunção é verdadeira.*

Dadas duas proposições φ e ψ, pode-se considerar a proposição que é a implicação de φ, ψ, a qual é representada por $\varphi \to \psi$. Intuitivamente, esta proposição é verdadeira se ψ é verdadeira sempre que φ é verdadeira. O significado do conetivo $\to$ é dado pela tabela seguinte

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

As duas primeiras linhas desta tabela de verdade vão ao encontro do que é intuitivamente esperado: se φ é verdadeira e ψ é verdadeira, então $\varphi \to \psi$ é verdadeira; se φ é verdadeira e ψ é falsa, então $\varphi \to \psi$ é falsa. As duas últimas linhas da tabela, que estabelecem que $\varphi \to \psi$ é verdadeira sempre que φ é falsa (independentemente do valor lógico de ψ) não são tão intuitivamente óbvias; estas duas últimas linhas são, no entanto, coerentes com o significado que se pretende para a implicação $\varphi \to \psi$, uma vez que apenas se pretende evitar que q seja falsa quando p é verdadeira.

Exemplo 1.11. *Consideremos a seguinte afirmação "Se hoje chover, o Manuel fica em casa a ver um filme." Esta afirmação tem a forma $p \to q$, onde p e q representam, respetivamente, as afirmações "Hoje chove." e "O Manuel fica em casa a ver um filme.". Note-se que a afirmação representada por $p \to q$ não afirma que hoje chove nem que o Manuel fica em casa a ver um filme. A afirmação apenas informa o que acontecerá hoje caso chova, mas não dá qualquer informação caso não chova. Caso não chova o Manuel poderá ver um filme ou não, o que continua a ser consistente com a afirmação inicial.*

Exemplo 1.12. *Das proposições a seguir consideradas*

(1) *"Se $1 > 3$, então $1 > 2$."*

(2) *"Se $1 > 3$, então $3 > 2$."*

(3) *"Se $3 > 2$, então $3 > 4$."*

(4) *"Se $3 > 2$, então $3 > 1$."*

a primeira e a segunda proposições são verdadeiras, a terceira proposição é falsa e a última é verdadeira.

Dadas duas proposições φ e ψ, a proposição $\varphi \leftrightarrow \psi$ é verdadeira se ambas as proposições tiverem o mesmo valor lógico. O significado do conetivo $\leftrightarrow$ é dado pela tabela seguinte

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Exemplo 1.13. *Consideremos a afirmação "O João vai ao cinema se e só se o Manuel for.". Esta afirmaçao pode ser representada por $p \leftrightarrow q$ onde p e q representam, respetivamente, as afirmações "O João vai ao cinema" e o "O Manuel vai ao cinema". Da afirmação representada por $p \leftrightarrow q$ não se pode concluir que o João vai ao cinema nem que o Manuel vai; de facto, apenas é possível concluir que o João e o Manuel vão ambos ao cinema ou nenhum dos dois vai.*

Exemplo 1.14. *Das proposições a seguir consideradas*

(1) "$1 + 1 = 2$ *se e só se* $2 + 4 = 6$."

(2) "$1 + 1 = 3$ *se e só se* $2 + 4 = 7$."

(3) "$1 > 3$ *é equivalente a* $3 > 1$."

as duas primeiras são verdadeiras e a terceira é falsa.

Agora que estão definidos os significados dos diversos conetivos, podemos determinar o valor lógico de fórmulas mais complexas. Conhecidos os valores lógicos das variáveis proposicionais que ocorrem numa fórmula, esta tem associado um e um só valor lógico. Na análise de qual será o valor lógico de uma fórmula, relacionando-o com os valores lógicos das variáveis que nela ocorrem, é útil o recurso a tabelas de verdade.

Exemplo 1.15. *Pretendemos determinar o valor lógico de $\neg p \vee (q \wedge p)$ em função dos valores lógicos das variáveis proposicionais p e q. A fórmula $\neg p \vee (q \wedge p)$ tem 2 variáveis proposicionais (p e q), pelo que na construção da tabela de verdade desta fórmula temos de considerar todas as combinações possíveis dos seus valores lógicos. Cada variável pode assumir um dos dois valores lógicos, pelo que existem 2^2 combinações possíveis. Por conseguinte, a tabela de verdade de $\neg p \vee (q \wedge p)$ tem 2^2 linhas. Para cada uma das combinações dos valores lógicos de p e q determina-se o valor lógico de $\neg p$ e de $q \wedge p$, para depois determinar o valor lógico de $\neg p \vee (q \wedge p)$.*

p	q	$\neg p$	$q \wedge p$	$\neg p \vee (q \wedge p)$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Exemplo 1.16. *Estudemos, agora, o valor lógico de* $(\neg p \vee q) \to r$ *em função dos valores lógicos das variáveis proposicionais* p, q *e* r. *A fórmula* $(\neg p \vee q) \to r$ *tem 3 variáveis proposicionais (*p, q *e* r*), pelo que a tabela de verdade desta fórmula tem* 2^3 *linhas. Para cada uma das combinações dos valores lógicos de* p, q *e* r *determina-se o valor lógico de* $(\neg p)$ *e de* $(\neg p \vee q)$ *e, por último, o valor lógico de* $((\neg p \vee q) \to r)$.

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$(\neg p \vee q) \to r$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0

Se φ é uma fórmula com n variáveis proposicionais, existem 2^n combinações possíveis para os valores lógicos das variáveis que ocorrem em φ. Logo, a tabela de φ tem 2^n linhas.

Existem fórmulas que assumem sempre o valor lógico verdadeiro qualquer que seja a combinação dos valores lógicos das variáveis que nelas ocorrem. Quando tal acontece diz-se que a fórmula é uma *tautologia*. A negação de uma tautologia é uma fórmula que assume sempre o valor lógico falso; a estas fórmulas dá-se a designação de contradições.

Definição 1.4. *Dada uma fórmula* φ *do Cálculo Proposicional, diz-se que:*

- φ *é uma* **tautologia** *se* φ *assume sempre o valor lógico verdadeiro, independentemente dos valores lógicos das variáveis proposicionais que a compõem.*

- φ *é uma* **contradição** *se* φ *sempre o valor lógico falso, independentemente dos valores lógicos das variáveis proposicionais que a compõem.*

Exemplo 1.17.

(1) As fórmulas $p \vee (\neg p)$ *e* $p \to p$ *são tautologias.*

p	$\neg p$	$p \vee (\neg p)$
1	0	1
0	1	1

p	$p \to p$
1	1
0	1

(2) As fórmulas $p \wedge \neg p$ *e* $p \leftrightarrow (\neg p)$ *são contradições.*

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
1	0	0
0	1	0

p	$\neg p$	$p \leftrightarrow (\neg p)$
1	0	0
0	1	0

No exemplo anterior, verifica-se que as fórmulas $p \wedge \neg p$ e $p \leftrightarrow (\neg p)$ têm tabelas de verdade iguais e é simples verificar que a fórmula $(p \wedge \neg p) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (\neg p))$ é uma tautologia. De um modo geral, se φ e ψ são fórmulas do Cálculo Proposicional que assumem o mesmo valor lógico para qualquer uma das combinações de valores lógicos que sejam atribuídos às variáveis porposicionais que as compõem, então a fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia. Neste caso, diz-se que φ e ψ são logicamente equivalentes.

Definição 1.5. *Sejam φ e ψ duas fórmulas proposicionais. Diz-se que φ e ψ são* **logicamente equivalentes** *quando a fórmula proposicional $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia. Neste caso, escrevemos $\varphi \Leftrightarrow \psi$.*

Listam-se de seguida algumas das equivalências lógicas mais conhecidas e frequentemente utilizadas em provas matemáticas.

Proposição 1.6. *Dadas fórmulas proposicionais φ, ψ e σ, são válidas as seguintes equivalências lógicas:*

1. *(associatividade)*
   $((\varphi \vee \psi) \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \vee (\psi \vee \sigma))$; $\quad ((\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge (\psi \wedge \sigma))$;
2. *(comutatividade)*
   $(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\psi \vee \varphi)$; $\quad (\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\psi \wedge \varphi)$;
3. *(idempotência)*
   $(\varphi \vee \varphi) \Leftrightarrow \varphi$; $\quad (\varphi \wedge \varphi) \Leftrightarrow \varphi$;
4. *(elemento neutro)*
   $(\varphi \vee (\psi \wedge \neg\psi)) \Leftrightarrow \varphi$; $\quad (\varphi \wedge (\psi \vee \neg\psi)) \Leftrightarrow \varphi$;
5. *(elemento absorvente)*
   $(\varphi \vee (\psi \vee \neg\psi)) \Leftrightarrow (\psi \vee \neg\psi)$; $\quad (\varphi \wedge (\psi \wedge \neg\psi)) \Leftrightarrow (\psi \wedge \neg\psi)$;
6. *(leis de De Morgan)*
   $\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$; $\quad \neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$;
7. *(distributividade)*
   $((\varphi \wedge \psi) \vee \sigma) \Leftrightarrow ((\varphi \vee \sigma) \wedge (\psi \vee \sigma))$; $\quad ((\varphi \vee \psi) \wedge \sigma) \Leftrightarrow ((\varphi \wedge \sigma) \vee (\psi \wedge \sigma))$;

8. *(dupla negação)*
   $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$;

9. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$;

10. $(\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$.

Demonstração. Mostremos que as fórmulas $\varphi \rightarrow \psi$ e $\neg\varphi \vee \psi$ são logicamente equivalentes. Construindo a tabela de verdade de $(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$	$\neg\varphi \vee \psi$	$(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

concluímos que esta fórmula é uma tautologia e, portanto, as fórmulas $\varphi \rightarrow \psi$ e $\neg\varphi \vee \psi$ são logicamente equivalentes. ☐

Exemplo 1.18. *Usando uma sequência de equivalências lógicas, prova-se que a fórmula $\neg(p \rightarrow q) \vee \neg p$ é logicamente equivalente a $\neg(q \wedge p)$. De facto,*

$$\begin{array}{rcll}
\neg(p \rightarrow q) \vee \neg p & \Leftrightarrow & \neg(\neg p \vee q) \vee \neg p & (\forall_{\varphi,\psi \in \mathcal{F}^{CP}} \ (\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)) \\
& \Leftrightarrow & (\neg(\neg p) \wedge \neg q) \vee \neg p & \textit{(lei de De Morgan)} \\
& \Leftrightarrow & (p \wedge \neg q) \vee \neg p & \textit{(dupla negação)} \\
& \Leftrightarrow & (p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p) & \textit{(distributividade)} \\
& \Leftrightarrow & \neg q \vee \neg p & \textit{(elemento neutro)} \\
& \Leftrightarrow & \neg(q \wedge p) & \textit{(lei de De Morgan).}
\end{array}$$

Alternativamente, pode-se provar que as fórmulas $\neg(p \rightarrow q) \vee \neg p$ e $\neg(q \vee p)$ são logicamente equivalentes, mostrando que a fórmula $(\neg(p \rightarrow q) \vee \neg p) \leftrightarrow (\neg(q \wedge p))$ é uma tautologia.

Dadas fórmulas φ e ψ, estas fórmulas são logicamente equivalentes se e só se $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia. Por seu turno, a fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia se e só se $\varphi \rightarrow \psi$ e $\psi \rightarrow \varphi$ são tautologias. Assim sendo, duas fórmulas são logicamente equivalentes se cada uma das fórmulas é uma consequência lógica da outra.

Definição 1.7. *Sejam φ e ψ fórmulas proposicionais. Diz-se que ψ é uma* **consequência lógica** *de φ ou que φ* **implica logicamente** *ψ, e escreve-se $\varphi \Rightarrow \psi$, se a fórmula proposicional $\varphi \rightarrow \psi$ é uma tautologia.*

Apresentam-se seguidamente alguns exemplos de implicações lógicas frequentemente utilizadas em provas matemáticas.

Proposição 1.8. *Sejam φ, ψ, σ fórmulas proposicionais. Então:*

1. $((\varphi \to \psi) \wedge \varphi) \Rightarrow \psi$ *(Modus Ponens).*
2. $((\varphi \to \psi) \wedge \neg\psi) \Rightarrow \neg\varphi$ *(Modus Tolens).*
3. $(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \varphi$ *(Simplificação).*
4. $(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \psi$ *(Simplificação).*
5. $\varphi \Rightarrow (\varphi \vee \psi)$ *(Adição).*
6. $\psi \Rightarrow (\varphi \vee \psi)$ *(Adição).*
7. $((\varphi \vee \psi) \wedge \neg\psi) \Rightarrow \varphi$ *(Modus Tollendo Ponens).*
8. $((\varphi \vee \psi) \wedge \neg\varphi) \Rightarrow \psi$ *(Modus Tollendo Ponens).*
9. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \to \psi)$ *(Bicondicional-Condicional).*
10. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \Rightarrow (\psi \to \varphi)$ *(Bicondicional-Condicional).*
11. $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \Rightarrow (\varphi \leftrightarrow \psi)$ *(Condicional-Bicondicional).*

Demonstração. Apresentamos a prova da implicação lógica indicada em 1., ficando a prova das restantes implicações ao cuidado do leitor.

Para provar que $((\varphi \to \psi) \wedge \varphi) \Rightarrow \psi$ basta mostrar que a fórmula $((\varphi \to \psi) \wedge \varphi) \to \psi$ é uma tautologia, o que pode ser feito através da construção da tabela de verdade desta fórmula

φ	ψ	$\varphi \to \psi$	$(\varphi \to \psi) \wedge \varphi$	$(\varphi \to \psi) \wedge \varphi \to \psi$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

□

Uma implicação lógica nem sempre é reversível. Por exemplo, dadas variáveis proposicionais p e q, sabe-se que $(p \wedge q) \Rightarrow p$, mas é simples verificar que p não implica logicamente $p \wedge q$. De facto, o valor lógico de $p \to (p \wedge q)$ nem sempre é verdadeiro: se representarmos por p a proposição "2 é um número natural par"e por q a proposição "2 é maior do 4", a proposição "Se 2 é um número natural par, então 2 é um número natural par e é maior do que 4" é representada por $p \to (p \wedge q)$ e o seu valor lógico é falso.

1.4 Cálculo de Predicados

Na secção anterior referimos que frases tais como "x é um inteiro ímpar" e "x+2=y" não são proposições, uma vez que o seu valor lógico pode ser o de verdade ou o de falsidade, dependendo dos valores de x e y. No entanto, é frequente encontrarmos, no estudo de qualquer teoria matemática, frases que fazem referência a objectos genéricos representados por letras. Frases como estas são objeto de estudo de um ramo da lógica designado por Cálculo de Predicados. Nesta unidade curricular, não temos por objetivo aprofundar o estudo de Cálculo de Predicados, mas apenas estudar algumas noções elementares que permitam a familiarização com o simbolismo, o significado, o uso e a negação de frases quantificadas.

Nas frases que envolvem letras, designadas por **variáveis**, que fazem referência a objetos genéricos, está implícito um domínio de discurso designado por **universo** ou **domínio de variação** das variáveis.

Exemplo 1.19. *Na frase "x é um inteiro ímpar" a variável x refere-se a um inteiro, pelo que o universo de x é o conjunto $\mathbb{Z}$.*

A frase "x é um inteiro ímpar' não é uma proposição. No entanto, se substituirmos x por valores do seu universo, obtemos frases às quais já é possível associar um valor de verdade. Por exemplo, "2 é um inteiro ímpar" e "3 é um inteiro ímpar" são proposições com o valor lógico falso e verdadeiro, respetivamente.

Definição 1.9. *Um* **predicado nas variáveis** $x_1, \ldots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$, *é uma frase declarativa que faz referência às variáveis $x_1, \ldots, x_n$, cujo valor lógico depende da substituição destas variáveis por valores do seu domínio de variação e que se torna numa proposição sempre que estas são substituídas por valores do universo.*

Um predicado nas variáveis $x_1, ..., x_n$ será representado por uma letra minúscula $p, q, r, ...$ (possivelmente com índices) seguida das variáveis que ocorrem no predicado (as quais são colocadas entre parêntesis e separadas por vírgulas).

Exemplo 1.20. *Os predicados "x é um inteiro ímpar" e "x é maior do que y" podem ser representados, respetivamente, por $p(x)$ e por $q(x, y)$.*

Os predicados podem ser combinados, por meio de conetivos lógicos, de forma a obter novos predicados.

Se $p(x_1, \ldots, x_n)$ e $q(x_1, \ldots, x_n)$ são predicados nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, então

$$(\neg p(x_1, \ldots, x_n)), \quad (p(x_1, \ldots, x_n) \wedge q(x_1, \ldots, x_n)),$$

$$(p(x_1, \ldots, x_n) \vee q(x_1, \ldots, x_n)), \quad (p(x_1, \ldots, x_n) \to q(x_1, \ldots, x_n))$$

$$\text{e} \quad (p(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow q(x_1, \ldots, x_n))$$

são também predicados nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

Exemplo 1.21. *O predicado "x é um inteiro ímpar e x é maior do que y" pode ser representado por* $p(x) \wedge q(x, y)$.

Dado um predicado $p(x_1, \ldots, x_n)$ e elementos $a_1, \ldots, a_n$ tais que, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, a_i é um valor do domínio de variação de x_i, representamos por $p(a_1, \ldots, a_n)$ a proposição resultante da substituição das variáveis de p por esses valores concretos.

Exemplo 1.22. *Considerando os predicados do exemplo anterior,* $p(5)$ *representa a proposição "5 é um inteiro ímpar" e* $q(5, 3)$ *representa a proposição "5 é maior do que 3".*

A substituição das variáveis de um predicado por valores concretos do seu universo não é a única forma de o converter numa proposição. Tal também pode ser conseguido através do uso de *quantificadores*.

Exemplo 1.23. *A partir do predicado 2+x=3 podemos construir frases tais como*

(i) Para todo o inteiro x, 2+x=3.

(ii) Existe um inteiro x tal que $2 + x = 3$.

Estas frases são proposições, uma vez que é possível associar-lhes um valor lógico.

Definição 1.10. *Sejam* $n \in \mathbb{N}$ *e* $i \in \{1, \ldots, n\}$. *Se* $p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ *é um predicado nas variáveis* $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n$, *frases tais como*

"Para todo x_i, $p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$.",

"Qualquer que seja x_i, $p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$.",

"Para cada x_i, $p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$.",

são designadas de **quantificação universal** *e são representadas por* $\forall_{x_i} p(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$.

Ao símbolo $\forall$ chamamos **quantificador universal** e é usual associar-lhe uma das seguintes leituras "todo", "para todo", "qualquer que seja" ou "para cada".

No caso em que $p(x)$ é um predicado na variável x, a frase representada por $\forall_x p(x)$ é uma proposição. A proposição $\forall_x p(x)$ é verdadeira se a proposição $p(a)$ for verdadeira para todo o elemento a do domínio de variação de x, também designado por **universo de quantificação de** x. Caso exista um elemento a do universo de variação de x para o qual a proposição $p(a)$ seja falsa, a proposição $\forall_x p(x)$ é falsa.

Exemplo 1.24. *Se* $q(x)$ *representar o predicado* $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ *e se o universo de quantificação de* x *for o conjunto dos reais, a proposição* $\forall_x q(x)$ *é verdadeira, uma vez que a proposição* $q(a)$ *é verdadeira para qualquer real* a.
Se p(x) representar o predicado "Se x é um número primo, então x é um número ímpar." e se o universo de quantificação de x for o conjunto dos números naturais, a proposição $\forall_x p(x)$ *é falsa, uma vez que* $2 \in \mathbb{N}$ *e* $p(2)$ *é falsa.*

Definição 1.11. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, \dots, n\}$. Se $p(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ é um predicado nas variáveis $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$, frases tais como*

> *"Existe x_i tal que $p(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$",*
>
> *"Para algum x_i, $p(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$"*

são designadas de **quantificação existencial** *e são representadas por $\exists_{x_i}\ p(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$.*

Ao símbolo $\exists$ dá-se a designação de **quantificador existencial** e é usual associar-lhe uma das seguintes leituras: "existe" ou "para algum".

Se $p(x)$ representa um predicado na variável x, a frase representada por $\exists_x\, p(x)$ é uma proposição. A proposição $\exists_x\, p(x)$ é verdadeira se a proposição $p(a)$ for verdadeira para algum elemento a do universo de quantificação. Caso não exista qualquer elemento a do universo de quantificação de x para o qual a proposição $p(a)$ seja verdadeira, a proposição $\exists_x\, p(x)$ é falsa.

Exemplo 1.25. *Se p(x) representar o predicado $2 + x = 3$ e se o universo de quantificação de x for o conjunto dos números naturais, então a proposição $\exists_x\, p(x)$ é verdadeira, pois 1 é um natural e $p(1)$ é verdade.*
Se $q(x)$ representar o predicado $x^2 + 1 = 0$ e se o universo de quantificação de x for o conjunto dos números reais, a proposição $\exists_x\, q(x)$ é falsa, uma vez que a equação $x^2 + 1 = 0$ não tem soluções em $\mathbb{R}$.

Se o universo de uma determinada quantificação for um certo conjunto U, podemos escrever $\exists_{x \in U}\, p(x)$ e $\forall_{x \in U}\, p(x)$ em vez de $\exists_x\, p(x)$ e $\forall_x\, p(x)$, respetivamente.

Exemplo 1.26. *A frase "Existe um natural x tal que $2 + x = 3$" pode ser representada por $\exists_{x \in \mathbb{N}}\ 2 + x = 3$.*

Se representarmos por $p(x)$ o predicado $2 + x = 3$, então o número natural 1 é o único natural u tal $p(u)$ é verdade.

A existência e unicidade de um único objeto que satisfaça um predicado $p(x)$ pode ser representada pela expressão $\exists^1_x\, p(x)$, à qual é usual associar uma das seguintes leituras "Existe um e um só x tal que $p(x)$" ou "Existe um único x tal que $p(x)$".

Exemplo 1.27. *A proposição $\exists^1_{x \in \mathbb{Z}}\ x + 3 = 2$ é verdadeira, mas a proposição $\exists^1_{x \in \mathbb{Z}}\ x > 1$ é falsa (tanto 2 como 3 satisfazem o predicado $x > 1$).*

Os quantificadores universal e existencial podem ser combinados para quantificar uma mesma condição.

Exemplo 1.28. *Considerando que $p(x, y)$ representa o predicado $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ e $q(x, y)$ representa o predicado $x > y$, então as frases*

"Para quaisquer dois números reais x e y, $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$."

"Para todo o inteiro y, existe um inteiro x maior do que y."

podem ser representadas, respetivamente, por $\forall_{x\in\mathbb{R}}\, \forall_{y\in\mathbb{R}}\ p(x,y)$ e $\forall_{y\in\mathbb{Z}}\, \exists_{x\in\mathbb{Z}}\ q(x,y)$.

Quando temos um predicado em duas ou mais variáveis, o valor lógico da proposição obtida pela quantificação de todas as variáveis pode depender da ordem dessas quantificações.

Exemplo 1.29. *Consideremos o predicado $x \geq y$.*

(i) A proposição $\forall_{x\in\mathbb{Z}}\, \exists_{y\in\mathbb{Z}}\ y \geq x$ é verdadeira.

(ii) A proposição $\exists_{y\in\mathbb{Z}}\, \forall_{x\in\mathbb{Z}}\ y \geq x$ é falsa.

Quando as quantificações de todas as variáveis são feitas com o mesmo quantificador, a ordem das quantificações não afeta o valor lógico da proposição e, por isso, é possível simplificar a escrita, usando apenas um quantificador.

Exemplo 1.30. *A proposição $\exists_{x\in\mathbb{Z}}\, \exists_{y\in\mathbb{Z}}\ x \geq y$ pode ser escrita como $\exists_{x,y\in\mathbb{Z}}\ x \geq y$.*
A proposição $\forall_{x\in\mathbb{Z}}\, \forall_{y\in\mathbb{Z}}\ x \geq y$ pode ser escrita como $\forall_{x,y\in\mathbb{Z}}\ x \geq y$.

Se a proposição $\exists_x\ p(x)$ é falsa, então não existe qualquer valor a do domínio de quantificação de x para o qual $p(a)$ seja verdadeira. Ou seja, $p(a)$ é falsa para todo o elemento a do domínio de quantificação de x. Assim, podemos afirmar que $\neg p(a)$ é verdadeira para todo o elemento a do domínio de quantificação de x, isto é, a proposição $\forall_x\ (\neg p(x))$ é verdadeira. Logo $\neg(\exists_x\ p(x))$ é logicamente equivalente a $\forall_x\ (\neg p(x))$.

Se $\forall_x\, p(x)$ é uma proposição falsa, tal significa que existe um valor a do domínio de quantificação de x tal que $p(a)$ é falsa, o que equivale a afirmar que a proposição $\exists_x\ (\neg p(x))$ é verdadeira. Assim, $\neg(\forall_x\ p(x))$ é logicamente equivalente a $\exists_x\ (\neg p(x))$.

Exemplo 1.31. *Consideremos a proposição "Existe um inteiro x tal que para qualquer outro inteiro y, $x+y=x$". Usando linguagem simbólica, podemos reescrever a afirmação anterior como*

$$\exists_{x\in\mathbb{Z}}\forall_{y\in\mathbb{Z}}\ x+y=x.$$

A negação da proposição é "Para todo o inteiro x, existe um inteiro y tal que $x+y \neq x$". Podemos, assim, reescrever a negação da proposição inicial como

$$\forall_{x\in\mathbb{Z}}\exists_{y\in\mathbb{Z}}\ x+y \neq x.$$

1.5 Alguns métodos de prova

A prova (demonstração) de uma proposição matemática consiste na verificação da veracidade da proposição.

A maioria das proposições matemáticas são enunciadas sob a forma de uma coleção de afirmações designadas por hipóteses e por uma afirmação designada por conclusão. A estas coleções de afirmações é usual dar a designação de argumento.

Definição 1.12. *Um* **argumento** *consiste numa lista de proposições* $(\psi_1, \ldots, \psi_n, \varphi)$, $n \geq 1$, *sendo as proposições* $\psi_1, \ldots, \psi_n$ *designadas de* **premissas** *(ou* **hipóteses***) e a proposição* φ *designada por* **conclusão**. *Um argumento* $(\psi_1, \ldots, \psi_n, \varphi)$ *pode ser representado por*

$$\begin{array}{c} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \\ \hline \therefore \varphi \end{array}$$

Um argumento pode ser válido ou inválido.

Definição 1.13. *Sejam* ψ_1, *...*, ψ_n, φ *proposições. Um argumento* $(\psi_1, \ldots, \psi_n, \varphi)$ *diz-se* **válido** *se a conclusão* φ *é verdadeira sempre que as premissas* ψ_1, *...*, ψ_n *são simultaneamente verdadeiras.*

Considerando a definição anterior, um argumento é válido se é impossível que as premissas sejam verdadeiras e a conclusão seja falsa. Por outras palavras, um argumento $(\psi_1, \ldots, \psi_n, \varphi)$ é válido se $(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \rightarrow \varphi$ é uma tautologia.

Exemplo 1.32. *Se* φ *e* ψ *são proposições, o argumento representado por*

$$\begin{array}{c} \psi \rightarrow \varphi \\ \psi \\ \hline \therefore \varphi \end{array}$$

é válido. De facto, pela tabela de verdade seguinte

		<u>Premissa 1</u>	<u>Premissa 2</u>	<u>Conclusão</u>
ψ	φ	$\psi \rightarrow \varphi$	ψ	φ
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

verifica-se que sempre que as premissas $\psi \rightarrow \varphi$ *e* ψ *são simultaneamente verdadeiras, a conclusão* φ *também é verdadeira.*

Um argumento é **inválido** se é possível que as premissas sejam todas verdadeiras e a conclusão seja falsa.

Exemplo 1.33. *Se φ e ψ são proposições, o argumento representado por*

$$\begin{array}{c} \psi \vee \varphi \\ \psi \\ \hline \therefore \varphi \end{array}$$

é um argumento inválido. Considerando a tabela de verdade seguinte

		Premissa 1	*Premissa 2*	*Conclusão*
ψ	φ	$\psi \vee \varphi$	ψ	φ
1	1	1	1	1
1	0	1	1	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	0

observa-se que é possível ter simultaneamente o valor lógico verdadeiro para as premissas $\psi \to \varphi$ e ψ e o valor lógico falso para a conclusão φ (linha 2 da tabela).

Exemplo 1.34. *O argumento*

O Carlos vai ao cinema, mas o Manuel não.

Se o Carlos vai ao cinema, o João também vai.

O Manuel não vai ao cinema, mas o João ou o Carlos vão.

Então o Carlos não vai ao cinema.

é inválido. De facto, se considerarmos que as variáveis proposicionais p, q e r representam as frases

p*: O Carlos vai ao cinema.*

q*: O João vai ao cinema.*

r*: O Manuel vai ao cinema.*

o argumento anterior pode ser representado por

$$\begin{array}{c} p \wedge (\neg r) \\ p \to q \\ (\neg r) \wedge (p \vee q) \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

e da tabela de verdade seguinte

p	q	r	$p \wedge (\neg r)$	$p \to q$	$(\neg r) \wedge (p \vee q)$	$\neg p$
1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	1	0	1

concluímos que o argumento é inválido, uma vez que é possível ter simultameamente as premissas verdadeiras e a conclusão falsa; tal acontece quando se atribui às variáveis proposicionais p, q e r os valores lógicos 1, 1 *e* 0, *respetivamente (linha 2 da tabela de verdade).*

O enunciado de uma proposição pode não estar estebelecido sob a forma de uma implicação, mas toda a proposição pode ser reescrita desta forma. Assim, a prova da veracidade de uma proposição pode ser realizada mostrando a validade de um argumento. Como vimos anteriormente, a prova de um argumento pode ser realizada recorrendo a tabelas de verdade, porém, na maioria dos casos, este não é o processo mais eficiente. Por exemplo, se o argumento a provar envolver 4 proposições simples, a tabela de verdade que será utilizada na prova do argumento necessitará de 16 linhas. Quanto mais complexo for o argumento, mais linhas terá a tabela de verdade. Em geral, para realizar a prova de um argumento, divide-se o argumento em implicações mais simples e prova-se cada uma delas individualmente. Se algumas das implicações já forem conhecidas (como, por exemplo, as implicações lógicas referidas anteriormente), essas implicações são usadas como blocos de construção para a prova de implicações mais complexas.

Seguidamente apresentam-se alguns métodos de prova utilizados na prova de proposições e que são justificados por algumas das implicações lógicas já mencionadas.

Embora não exista um único procedimento que se possa aplicar na prova de todas as proposições, o tipo de afirmações a provar pode dar alguma informação na estratégia a adotar na construção da prova.

A prova de uma proposição pode ser **direta** ou **indireta**. Numa prova direta de uma proposição procura-se estabelecer a veracidade da mesma a partir de axiomas ou factos conhecidos e sem assumir pressupostos adicionais. Porém, em certos casos a prova direta não é simples e pode mesmo não ser possível. Nestas situações pode-se optar por um método de prova indireta. Por exemplo, pode-se provar a veracidade de uma proposição mostrando que esta não pode ser falsa.

Prova direta de uma conjunção
Na prova direta de $p \wedge q$, procura-se uma prova de p e uma prova de q.

Note-se que se p e q são proposições, a proposição $p \wedge q$ é verdadeira se e só se p e q são verdadeiras.

O exemplo seguinte ilustra a prova direta de uma conjunção.

Exemplo 1.35. *Proposição: O quadrado de um número natural ímpar é um número ímpar e tem resto 1 na divisão inteira por* 4.

Demonstração: Dado um interio n, diz-se que n é ímpar se $n = 2k + 1$, para algum inteiro k. Assim, se n é um número natural ímpar, tem-se $n = 2k + 1$, para algum inteiro $k \geq 0$. Logo

$$n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

onde $2k^2 + 2k$ é um inteiro não negativo, e, portanto, n^2 é um natural ímpar. Claramente, n^2 tem resto 1 na divisão inteira por 4*, pois $n^2 = 4(k^2 + k) + 1$, $k^2 + k$ é um inteiro e $0 \leq 1 < 4$.*
□

Prova direta de uma disjunção
Na prova direta de $p \vee q$ basta fazer prova de uma das proposições p ou q.

A prova de uma disjunção está relacionada com a determinação do valor lógico de uma proposição do tipo $p \vee q$ a partir do valor lógico das proposições p e q. Uma vez que $p \vee q$ é verdadeira se e só se pelo menos uma das proposições p ou q é verdadeira, para provar que $p \vee q$ é verdadeira é suficiente mostrar que p (ou q) é verdadeira.

Exemplo 1.36. *Proposição: A soma de dois números naturais ímpares é um número par ou é um número ímpar.*

Demonstração: Dado um interio n, diz-se que n é ímpar se $n = 2k + 1$, para algum inteiro k, e diz-se que n é par se $n = 2k$ para algum inteiro k. Sendo n e m dois números naturais ímpares, tem-se, então, $n = 2j + 1$ e $m = 2k + 1$, para alguns $j, k \in \mathbb{N}_0$. Assim,

$$n + m = (2j + 1) + (2k + 1) = 2(j + k + 1),$$

onde $j + k + 1$ é um inteiro não negativo, e, portanto, $n + m$ é um número par. Provou-se que a soma de quaisquer dois números naturais ímpares é um número par, pelo que que a proposição inicial é verdadeira. □

Prova direta de uma implicação
Para demonstrar diretamente uma afirmação do tipo $p \to q$, encontra-se uma prova de q, assumindo a veracidade de p.

Se p e q são proposições, a proposição $p \to q$ é verdadeira se e só se p é falsa ou p e q são ambas verdadeiras. Assim, para provar que $p \to q$ é verdadeira, basta mostrar mostrar que sempre que p é verdadeira, a proposição q é também verdadeira.

Exemplo 1.37. *Proposição: Se a e b são reais tais que $0 < a < b$, então $a^2 < b^2$.*

Demonstração: Sejam a, b números reais tais que $0 < a < b$. Então, como $0 < a$ e $0 < b$, vem que $a^2 < ab$ e $ab < b^2$. Por conseguinte, $a^2 < b^2$. □

Em certos casos, a proposição a provar é logicamente a uma implicação da forma

$$(p \vee q) \rightarrow r.$$

Considerando que a implicação anterior é logicamente equivalente a

$$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r),$$

então a prova de $(p \vee q) \rightarrow r$ passa por mostrar cada uma das implicações $p \rightarrow r$ e $q \rightarrow r$.

Prova por casos
A prova de uma afirmação do tipo $(p \vee q) \rightarrow r$ consiste em procurar uma prova para cada uma das implicações $p \rightarrow r$ e $q \rightarrow r$. A uma prova deste tipo dá-se o nome de **prova por casos**.

Exemplo 1.38. *Proposição: Se a e b são reais tais que $0 \leq a < b$, então $a^2 < b^2$.*

Demonstração: Sejam a e b são reais tais que $0 \leq a < b$. Uma vez que $0 \leq a$, a prova é feita considerando dois casos: $0 < a$ e $a = 0$.

(i) Se $0 < a$, então $0 < a < b$, donde $a^2 < ab$ e $ab < b^2$ e, portanto, $a^2 < b^2$.

(ii) Se $a = 0$, então $0 < b$. Logo, como $a < b$, tem-se $ab < b^2$. Assim, e uma vez que $ab = 0 = a^2$, segue que $a^2 < b^2$.

De (i) e (ii) resulta que se a, b são reais tais que $0 \leq a < b$, então $a^2 < b^2$. □

Atendendo à equivalência lógica $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$, a prova de uma afirmação do tipo $p \leftrightarrow q$ passa pela prova de duas implicações.

Prova direta de uma equivalência
Na prova direta de $p \leftrightarrow q$ procura-se uma prova de $p \rightarrow q$ e uma prova de $q \rightarrow p$.

Exemplo 1.39. *Sejam n um inteiro. Então 6 divide n se e só se 2 divide n e 3 divide n.*

Demonstração: Dados inteiros a e b, diz-se que a divide b, e escreve-se $a \mid b$, se existe um inteiro k tal que $b = ak$.
$\Rightarrow$) Admitamos que $6 \mid n$. Então existe um inteiro p tal que $n = 6p$. Por conseguinte, $n = 3(2p)$, onde $2p$ é um inteiro; logo $3 \mid n$. De modo análogo, tem-se $6 = 2(3p)$, onde $3p$ é um inteiro, pelo que $2 \mid n$.

$\Leftarrow$) Admitamos que $2 \mid n$ e $3 \mid n$. Como $2 \mid n$, existe um inteiro p tal que $n = 2p$. Atendendo a que $3 \mid n$, existe um inteiro q tal que $n = 3q$. Então

$$n = 3n - 2n = 3(2p) - 2(3q) = 6p - 6q = 6(p - q),$$

onde $p - q$ é um inteiro. Portanto, $6 \mid n$. □

Prova direta de uma negação
Na prova de $\neg p$, assume-se p e procura-se uma contradição.

Exemplo 1.40. *Proposição: Não existem números naturais n e m tais que $2n + 4m = 17$.*

Demonstração: Pretende-se provar uma afirmação do tipo $\neg p$, onde p representa a proposição "Existem números naturais n e m tais que $2n + 4m = 17$.". Para tal, admitamos p, isto é, suponhamos que existem números naturais n e m tais que $2n + 4m = 17$. Então,

$$17 = 2n + 4m = 2(n + 2m),$$

pelo que 17 é divisível por 2, o que contradiz o facto de 17 ser um número ímpar.
Assim, não existem números naturais n e m tais que $2n + 4m = 17$. □

Como já foi referido anteriormente, em certos casos a prova direta não é simples e pode mesmo não ser possível. Nestes casos, pode tornar-se mais simples optar por uma prova indireta.

Prova indireta por contradição ou redução ao absurdo
Para provar uma afirmação p assume-se $\neg p$ e procura-se uma contradição.

No exemplo que se segue apresenta-se uma prova indireta recorrendo à prova por redução ao absurdo.

Exemplo 1.41. *Proposição: Existe um número infinito de números primos.*

Demonstração: No sentido de provarmos por contradição este resultado, admitamos que existe um número finito de números primos, digamos p_1, p_2, ..., p_n, com $n \in \mathbb{N}$. Considere-se, agora, o número

$$x = p_1 p_2 \dots p_n + 1.$$

É óbvio que o número x não é divisível por nenhum dos números primos $p_1, p_2, \dots, p_n$ (pois o resto da divisão é sempre 1). Logo x é um número primo, o que contradiz a hipótese inicial de que existem apenas n números primos. Então a hipótese inicial está errada e, portanto, existe um número infinito de números primos. □

Muitas proposições matemáticas são enunciadas na forma de uma implicação. Outras proposições não são enunciadas nesta forma, mas podem ser escritas na forma $p \to q$, pelo que a sua prova pode passar pela demonstração de uma implicação. Por estes motivos, é conveniente conhecer e estudar diversos métodos de prova indireta para uma implicação.

A prova de $p \to q$ pode ser feita por contradição. Note-se que $p \to q$ é logicamente equivalente a $\neg p \vee q$, pelo que $\neg(p \to q)$ é logicamente equivalente a $p \wedge \neg q$.

Prova indireta de uma implicação por redução ao absurdo
Na prova de $p \to q$ por redução ao absurdo assume-se $p \wedge \neg q$ e procura-se uma contradição.

Exemplo 1.42. *Proposição: Se a e b são inteiros, então $a^2 - 4b \neq 2$.*

Demonstração: Pretendemos provar uma proposição do tipo $p \to q$, onde p representa a afirmação "a e b são números inteiros." e q representa a afirmação "$a^2 - 4b \neq 2$". A prova segue por redução ao absurdo. Nesse sentido, admitamos $p \wedge \neg q$, isto é, suponhamos que a e b são inteiros e que $a^2 - 4b = 2$. Então

$$a^2 = 2 + 4b = 2(1 + 2b)$$

e, portanto, a^2 é par. Como o quadrado de qualquer inteiro ímpar é um inteiro ímpar, então a é par. Logo $a = 2c$, para algum inteiro c. Substituindo a por $2c$ em $a^2 - 4b = 2$, obtemos $4c^2 - 4b = 2$, donde resulta a contradição $2(c^2 - b) = 1$, uma vez que 1 não é par. A contradição resultou de admitirmos que existem inteiros a e b tais que $a^2 - 4b = 2$. Logo, se a e b são inteiros, tem-se $a^2 - 4b \neq 2$. $\square$

Atendendo a que $p \to q$ é logicamente equivalente a $\neg q \to \neg p$, a demonstração da primeira implicação pode ser feita, indiretamente, apresentando uma prova de $\neg q \to \neg p$.

Prova indireta de uma implicação por contraposição ou por contrarrecíproco
Por forma a provar $p \to q$, assume-se $\neg q$ e procura-se uma prova de $\neg p$.

Exemplo 1.43. *Proposição: Sejam a e b números reais. Se $a+b$ e ab são números irracionais, então a ou b é um número irracional.*

Sejam a e b números reais. Representando por p a afirmação "$a + b$ e ab são números irracionais." e por q a afirmação "a ou b é um número irracional.", pretende-se provar a afirmação representada por $p \to q$.

No sentido de fazer a prova de $p \to q$ por contraposição, admitamos $\neg q$, isto é, admitamos que a e b são números racionais.

Um número real x diz-se um número racional *se existem um número inteiro s e um número inteiro não nulo t tais que $a = \frac{s}{t}$. Um número real que não seja racional diz-se um* número irracional.

Assim, se a e b são números racionais, existem inteiros m, n, s, t tais que $t \neq 0$, $n \neq 0$, $a = \frac{s}{t}$ e $b = \frac{m}{n}$. Assim,

$$a + b = \tfrac{sn+tm}{nt}, \text{ onde } sn + tm \text{ e } nt \text{ são inteiros e } nt \neq 0,$$
$$ab = \tfrac{sm}{nt}, \text{ onde } sm \text{ e } nt \text{ são inteiros e } nt \neq 0.$$

Logo $a + b$ e ab são números racionais e, portanto, tem-se $\neg p$.

Uma vez que ambas as fórmulas $\neg p \to q$ e $\neg q \to p$ são logicamente equivalentes a $p \vee q$, a prova da disjunção de p e q pode passar pela prova de $\neg p \to q$ ou de $\neg q \to p$.

Prova indireta de uma disjunção
Assume-se $\neg p$ e procura-se uma prova de q ou, analogamente, assume-se $\neg q$ e procura-se uma prova de p.

Note-se que se p e q são proposições, então $p \vee q$ é logicamente equivalente a $\neg p \to q$ e a $\neg q \to p$.

Exemplo 1.44. *Proposição: Dados dois números reais x e y tais que $xy = 0$, temos $x = 0$ ou $y = 0$.*

Demonstração: Pretendemos mostrar que $x = 0$ ou $y = 0$, assumindo que x e y são números reais tais que $xy = 0$. Iremos demonstrar esta disjunção recorrendo a uma prova indireta. Nesse sentido, começamos por supor que $x \neq 0$ e procuramos concluir que $y = 0$. Sendo x um número real não nulo, então $\frac{1}{x}$ é um número real. Logo,

$$xy = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}(xy) = \frac{1}{x} \cdot 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} \cdot x\right) y = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot y = 0 \Leftrightarrow y = 0. \square$$

Prova de uma proposição com quantificador universal
Na prova direta de uma proposição do tipo $\forall_x\, p(x)$, admitimos que a variável a representa um elemento arbitrário do universo de quantificação da variável x e mostramos que $p(a)$ é verdadeira.

Exemplo 1.45. *Proposição: Para todo o número natural n, se $n \geq 2$ então $n^2 + 5n + 2 \geq 16$.*

Demonstração: Pretendemos mostrar que $\forall_{n \in \mathbb{N}}\, (n \geq 2 \to n^2+5n+2 \geq 16)$. Admitamos que a representa um valor arbitrário em $\mathbb{N}$ e procuremos mostrar que se $a \geq 2$, então $a^2+5a+2 \geq 16$. Ora, assumindo que $a \geq 2$, tem-se $a^2 \geq 4$ e $5a \geq 10$ e, portanto, $a^2 + 5a + 2 \geq 16$. $\square$

Na prova direta de uma proposição do tipo $\forall_x\, p(x)$ e no caso em que o universo de quantificação de x é um conjunto finito U, pode-se optar por uma **prova por exaustão**, testando individualmente, para cada $a \in U$, se $p(a)$ é verdadeira.

Prova de uma proposição com quantificador existencial
Numa prova direta de uma proposição do tipo $\exists_x\, p(x)$ é necessário exibir um elemento a do universo de quantificação da variável x tal que $p(a)$ seja verdade.

O tipo de prova referido anteriormente diz-se uma **prova construtiva**.

Exemplo 1.46. *Proposição: Existe um número natural n tal que $2n^2 - 5n + 2$ é um número primo.*

Demonstração: Pretendemos mostrar que $\exists_{n \in \mathbb{N}}$ ($2n^2 - 5n + 2$ é um número primo). Considerando $a = 3$ tem-se $2 \times 3^2 - 5 \times 3 + 2 = 5$ e 5 é primo. Logo a proposição

$$\exists_{n \in \mathbb{N}}\, (2n^2 - 5n + 2 \text{ é um número primo})$$

é verdadeira. $\square$

Em certos casos a prova construtiva não é simples ou não é possível e nestes casos pode-se optar por uma prova indireta por contradição - neste caso a prova diz-se **não construtiva**.

Prova de existência e unicidade
A prova de afirmações do tipo $\exists^1_x\, p(x)$ pode ser dividida em duas partes:

prova de existência - prova-se que existe, pelo menos, um elemento a do universo de quantificação de x tal que $p(a)$ é verdade;

prova de unicidade - supõe-se que a e b são dois elementos do universo de quantificação tais que $p(a)$ e $p(b)$ são verdadeiras e mostra-se que $a = b$.

Exemplo 1.47. *Proposição: Existe um elemento neutro para a multiplicação em $\mathbb{R}$ e esse elemento é único.*

Demonstração: Pretendemos mostrar que $\exists^1_{u\in\mathbb{R}}\, \forall_{x\in\mathbb{R}}\, xu = ux = x$.
Prova de existência: Consideremos $u = 1 \in \mathbb{R}$. Pretendemos mostrar que $\forall_{x\in\mathbb{R}}\, xu = ux = x$. Ora, dado $x \in \mathbb{R}$,

$$xu = x \times 1 = x = 1 \times x = ux.$$

Prova de unicidade: Suponhamos que $u' \in \mathbb{R}$ é elemento neutro para a multiplicação. Então,

$$1 = 1 \times u'.$$

Por outro lado, 1 é elemento neutro para a multiplicação e, portanto,

$$u' = 1 \times u'.$$

Logo, $u' = 1$. □

Prova de falsidade por contra-exemplo
A prova de falsidade de uma proposição do tipo $\forall_x\, p(x)$ passa por mostrar que existe um elemento a do universo de quantificação tal que $p(a)$ é falsa. Neste caso, diz-se que o elemento a é um **contra-exemplo** para a proposição $\forall_x\, p(x)$.

Exemplo 1.48. *Mostremos a falsidade da proposição*

"Para todo o número natural primo n, $2^n - 1$ é primo."

Demonstração: Esta proposição é da forma $\forall_{x\in\mathbb{N}}\, p(x)$, onde $p(x)$ é o predicado "x é um número primo". Assim, para mostrar que esta proposição é falsa, basta mostrar que a proposição $\exists_{x\in\mathbb{N}}\, \neg p(x)$ é verdadeira. Ora, considerando o número natural 11, 11 é um número primo e $2^{11} - 1$ não é primo, pois $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$. Logo, o número natural 11 é um contraexemplo para a proposição indicada. □