63. Considere as seguintes relações em $\mathbb{N}$:

    $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x > y\}$ $\quad$ $R_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists_{n \in \mathbb{N}} : xy = n^2\right\}$

    $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y = 10\}$ $\quad$ $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + 4y = 10\}$

    Diga quais destas relações são:

    i) reflexivas; ii) simétricas; iii) transitivas; iv) anti-simétricas.

64. Sejam R e S relações binárias sobre um conjunto A. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes:

    a) Se R é reflexiva (respetivamente simétrica, transitiva, anti-simétrica) então R^{-1} é reflexiva (respetivamente simétrica, transitiva, anti-simétrica).
    b) Se R e S são transitivas (respetivamente anti-simétricas), então $R \cup S$ é transitiva (respetivamente anti-simétrica).

65. Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa:

    «toda a relação simétrica e transitiva é reflexiva».

66. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e considere a seguinte relação de equivalência em A:

    $$R = \{(1, 1), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (2, 6), (3, 2), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 1), (5, 5), (6, 2), (6, 3), (6, 6)\}.$$

    Descreva cada classe de equivalência na relação R e indique o conjunto quociente A/R.

67. Considere as seguintes relações binárias:

    em $\mathbb{N}$, $\quad x\,\rho_1\,y \Leftrightarrow \mathrm{mdc}\,(x, y) = 1$; $\quad x\,\rho_2\,y \Leftrightarrow x \leq y$;

    em $\mathbb{N}^2$, $\quad (x, y)\ \sigma\ (x', y') \Leftrightarrow y = y'$.

    a) Diga, justificando, quais das relações indicadas são
        i) reflexivas.
        ii) simétricas.
        iii) transitivas.
    b) Para as relações de equivalência, descreva cada classe de equivalência e indique o conjunto quociente.

68. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{Z}$. Diz-se que a **é congruente com** b, **módulo** n, e escreve-se

    $$a \equiv b \pmod{n}$$

    se $a - b = nk$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Mostre que

    a) a relação binária **congruência módulo** n é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$.
    b) dados $a, b \in \mathbb{Z}$, as afirmações seguintes são equivalentes:
        i) $a \equiv b \pmod{n}$;
        ii) $b = a + nq$, para algum $q \in \mathbb{Z}$;
        iii) a e b têm o mesmo resto na divisão inteira por n.
    c) cada inteiro é congruente módulo n com um e um só inteiro não negativo menor do que n.

69. Dado $n \in \mathbb{N}$, considere a **congruência módulo** n. Para cada $a \in \mathbb{Z}$, a classe de equivalência de a representa-se por $[a]_n$. O conjunto quociente $\{\, [a]_n \mid a \in \mathbb{Z} \}$ representa-se por $\mathbb{Z}_n$.

    a) Mostre que $\mathbb{Z}_n = \{\, [0]_n\,, [1]_n\,, \ldots, [n-1]_n \,\}$.

    b) Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações:

    i) $[38]_6 \notin \mathbb{Z}_6$

    ii) $[27]_7 \neq [13]_7$

    iii) $\mathbb{Z}_5 = \{\, [10]_5\,, [8]_5\,, [6]_5\,, [4]_5\,, [2]_5 \,\}$

    iv) $[21]_8 \cap [-5]_8 = \emptyset$

    v) se $[3a]_5 = [-3]_5$ então $5 \mid (a+1)$

    vi) $[-43]_5 \cap [2]_5 = [7]_5$

    vii) $[8]_6 = [8]_2$

70. Seja $A = \{2, 3, 4, 6, 7\}$ e considere os seguintes conjuntos

    $\mathcal{D}_1 = \{\, \{2, 4\}\,, \{3\}\,, \{4, 6\}\,, \{3, 6, 7\} \,\}$ $\quad$ $\mathcal{D}_2 = \{\, \{2, 4, 6\}\,, \{3, 7\} \,\}$

    $\mathcal{D}_3 = \{\, \{2\}\,, \emptyset, \{3, 4\}\,, \{6, 7\} \,\}$ $\quad$ $\mathcal{D}_4 = \{\, \{2, 6\}\,, \{3, 7\}\,, \{4\} \,\}$

    $\mathcal{D}_5 = \{\, \{2, 3, 4, 6, 7\} \,\}$ $\quad$ $\mathcal{D}_6 = \{\, \{2\}\,, \{3, 4, 7\} \,\}$

    $\mathcal{D}_7 = \{\, \{2\}\,, \{3\}\,, \{4\}\,, \{6\}\,, \{7\} \,\}$

    Diga, justificando, quais dos conjuntos $\mathcal{D}_i$ $(1 \leq i \leq 7)$ são partições de A e, em cada um desses casos, determine a relação de equivalência em A associada a $\mathcal{D}_i$.

71. Considere o conjunto $\mathcal{D} = \{\, \{a\} \times \mathbb{R} \mid a \in \mathbb{R} \,\}$.

    a) Mostre que $\mathcal{D}$ é uma partição de $\mathbb{R}^2$.

    b) Determine a relação de equivalência $R_{\mathcal{D}}$ associada a $\mathcal{D}$.

72. Considere os seguintes conjuntos e as relações neles definidas.

    $A_1 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ $\quad$ $R_1 = \{(x, y) \in A_1 \times A_1 \mid x \text{ é múltiplo de } y\}$

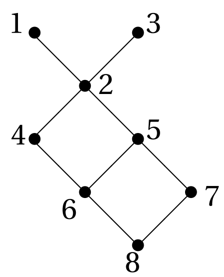
    $A_2 = \mathbb{N}$ $\quad$ $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \text{mdc}\,(x, y) = 1\}$

    $A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad$ $R_3 = \{(x, y) \in A_3 \times A_3 \mid x \text{ divide } y\}$

    $A_4 = \mathbb{Z}$ $\quad$ $R_4 = R_3$

    Para cada i $(1 \leq i \leq 4)$ diga se R_i é uma ordem parcial em A_i e, em caso afirmativo e se possível, construa o respetivo diagrama de Hasse.

73. Considere o conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, parcialmente ordenado de acordo com o diagrama de Hasse seguinte, e os subconjuntos $A = \{4, 5, 6, 7\}$ e $B = \{1, 2, 4, 7\}$ de X.



Determine, caso existam,

a) os elementos maximais, minimais, máximo e mínimo de X.

b) os majorantes, minorantes, supremo e ínfimo de A e de B.