46. Descreva por extensão:

 a) $\mathcal{P}(\emptyset)$ b) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ c) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$

47. Sejam A e B conjuntos.

 a) Mostre que $A \subseteq B$ se e só se $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.
 b) Conclua que $A = B$ se e só se $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$.

48. Seja E o conjunto $\{1, \{1\}, 2, \{1, 2\}\}$. Determine:

 a) $\mathcal{P}(E)$.
 b) $E \cap \mathcal{P}(E)$.

49. Considere o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e sejam F, G e H os seus seguintes subconjuntos

$$F = \{a \in \mathbb{N} \mid a < 10\}\,; \quad G = \{a \in \mathbb{N} \mid a > 5\}\,; \quad H = \{a \in \mathbb{N} \mid a \text{ é divisível por } 3\}\,.$$

 Determine cada um dos seguintes conjuntos: $F \cap G$, $F \cap H$, $G \cap H$, $F \cup G$, $F \cup H$, $G \cup H$.

50. Seja $X = \{a, b, c, d, e\}$. Indique três subconjuntos A, B e C de X, disjuntos dois a dois, tais que $A \cup B \cup C = X$.

51. Mostre que uma condição necessária para que $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ é que $C \subseteq A$. Esta condição será suficiente?

52. Considere A e B quaisquer subconjuntos de um conjunto E. Prove que:

 a) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$.
 b) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$.
 c) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \backslash B = \emptyset$.
 d) $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$.
 e) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.
 f) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
 g) $\overline{A} \setminus \overline{B} = B \setminus A$.

53. Sejam A e B conjuntos tais que $A \subseteq B$. Prove que existe um único subconjunto X de B tal que $X \cup A = B$ e $X \cap A = \emptyset$.

54. Determine o complementar de A, $\overline{A}$, no universo X, sendo

 a) $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $A = \{0, 2, 4\}$.
 b) $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $A = \{a \in X \mid a \text{ é ímpar}\}$.
 c) $X = \mathbb{N}$ e $A = \{a \in \mathbb{N} \mid \exists_{n \in \mathbb{N}} : a = 2n\}$.
 d) $X = \mathbb{Z}$ e $A = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists_{n \in \mathbb{N}} : a = 2n\}$.

55. Determine $\displaystyle\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ e $\displaystyle\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i$ onde, para cada $i \in \mathbb{N}$,

 a) $B_i = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 2i\}$
 b) $B_i = \{i - 1, i, i + 1\}$
 c) $B_i = \left[-1, 3 + \frac{1}{i}\right]$
 d) $B_i = \left[\frac{3}{i}, 5 + \frac{2}{i}\right[$

56. Prove, por indução, que
$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$
onde os A_i são subconjuntos de um conjunto X.

57. Dados os conjuntos $A = \{0, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3\}$, determine cada um dos conjuntos seguintes:

    a) $A \times B$
    b) $B \times A$
    c) $(A \times B) \cap (B \times A)$
    d) $(A \times B) \setminus (B \times A)$
    e) $(B \times A) \setminus (A \times B)$

58. Sejam A, B, C conjuntos. Prove que:

    a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
    b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
    c) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.
    d) Se A e B são não vazios, então $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times C \Leftrightarrow A = B = C$.
    e) $A \times B = \emptyset$ se e só se $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

59. Sejam A e B conjuntos. Mostre que

    a) se $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ e $C = A' \times B'$, então $C \subseteq A \times B$.
    b) se $D \subseteq A \times B$, podem não existir $A'' \subseteq A$ e $B'' \subseteq B$ tais que $D = A'' \times B''$.

60. Para cada uma das relações seguintes indique os respetivos domínio e contradomínio.

    a) S é a relação $S = \{(0, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 3)\}$ de $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ para $B = \{1, 2, 3\}$.
    b) R é a relação em $\mathbb{R}$ dada por $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$.
    c) $|$ é a relação "divide" em $\{2, 3, 4, 6, 9, 10, 12, 20\}$ definida por
    $$a \mid b \Leftrightarrow \exists_{n \in \mathbb{N}} : b = na.$$
    d) Dado um conjunto não vazio A, T é a relação $T = \{(x, X) \mid x \in X\}$ de A para $\mathcal{P}(A)$.
    e) $<$ é a relação "menor" usual em $\mathbb{N}$.

61. Seja $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Considere as seguintes relações em A: $R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (10, 8)\}$, $S = \{(10, 2), (10, 8)\}$ e $T = \{(6, 2), (6, 4), (8, 10)\}$. Determine

    a) R^{-1} b) $R^{-1} \cup S^{-1}$ c) $T \setminus S^{-1}$ d) $T^{-1} \cap S$
    e) $S \circ T$ f) $R \circ T$ g) $S^{-1} \circ T^{-1}$ h) $S^{-1} \circ S$

62. Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Considere as seguintes relações em A:
    $R_1 = \{(1, 1), (1, 2)\}$ $R_2 = \{(1, 1), (2, 3), (4, 1)\}$
    $R_3 = \{(1, 3), (2, 2), (2, 4), (4, 2)\}$ $R_4 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
    $R_5 = A \times A$ $R_6 = \emptyset$
    Diga quais destas relações são
    i) reflexivas em A; ii) simétricas; iii) transitivas; iv) anti-simétricas.