33. Considere as seguintes proposições, nas quais o universo de cada quantificação é o conjunto dos números reais.

    a) $\forall_x \exists_y \ x + y = 0$
    b) $\exists_x \forall_y \ x + y = 0$
    c) $\exists_x \forall_y \ x + y = y$
    d) $\forall_x \left(x > 0 \to \exists_y \ xy = 1\right)$

    Relativamente a cada uma destas proposições,

    i) diga, justificando, se é verdadeira ou não;
    ii) apresente uma proposição equivalente à sua negação, sem recorrer ao conetivo $\sim$.

34. Prove que as seguintes afirmações são falsas:

    a) Para todos os primos p e q, $p^2 + q^2$ é também primo.
    b) Quaisquer que sejam os números $a, b \in \mathbb{R}$, se $a > b$ então $a^2 > b$.
    c) Para todo o $x \in \mathbb{R}$, se $x^4 = 1$ então $x = 1$.

35. Prove, por indução, as seguintes propriedades dos números naturais:

    a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}\, n\,(n+1)$
    b) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$
    c) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n\,(n+1)$
    d) $1 + 3 + 9 + 27 + \ldots + 3^n = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$
    e) $\sum\limits_{i=1}^{n} (2i-1)^2 = \dfrac{n\left(4n^2 - 1\right)}{3}$
    f) $n^2 > 2n + 1$, para todo $n \geq 3$
    g) $2^n > n^2$, para todo $n \geq 5$
    h) $n! > n^2$, para todo $n \geq 4$
    i) $3^{2n} - 1$ é múltiplo de 8

36. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $P(n)$ a propriedade: $n^2 + 5n + 1$ é par.

    a) Mostre que, para cada $k \in \mathbb{N}$, se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ é verdadeira.
    b) Diga, justificando, para que naturais n a propriedade $P(n)$ é verdadeira.

37. Prove que para todo o $n \in \mathbb{N}$ se tem

    a) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$
    b) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n\,(n+1)}{2}\right)^2$
    c) $\sum\limits_{i=1}^{n} i\,(i+1) = \dfrac{n\,(n+1)\,(n+2)}{3}$
    d) $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i\,(i+1)} = \dfrac{n}{n+1}$
    e) $8^n - 3^n$ é divisível por 5.

38. Prove que

    a) para todo o $n \in \mathbb{N}$, $n+1$ é primo ou pode ser fatorizado em primos.

    b) para todo o $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$, o número de fatores primos de n é menor do que $2\log n$.

39. Indique o erro na seguinte "demonstração" de que quaisquer dois números naturais são iguais:

    Seja $P(n)$ a propriedade 'se a e b forem números naturais tais que $\text{máx}\{a, b\} = n$, então $a = b$'.

    1. $P(1)$ é claramente verdadeira.

    2. Suponhamos que $P(k)$ é verdadeira. Sejam a e b números naturais quaisquer tais que $\text{máx}\{a, b\} = k+1$; sejam $\alpha = a-1$ e $\beta = b-1$; então $\text{máx}\{\alpha, \beta\} = k$, donde $\alpha = \beta$ e portanto $a = b$ e $P(k+1)$ é verdadeira.

    Fica assim provado que a propriedade $P(n)$ é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$ e, portanto, dados dois números naturais a, b quaisquer, como $\text{máx}\{a, b\}$ é um número natural, temos $a = b$.

40. Seja $P = \left\{0, 1, -1, -\frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}\right\}$. Identifique os conjuntos seguintes:

    $A = \left\{c^2 \mid c \in P\right\}$ $\quad$ $B = \left\{c \in P \mid c^2 \in P\right\}$

    $C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists_{c \in P} : c = x^2\right\}$ $\quad$ $D = \left\{y \in \mathbb{Z} \mid y^2 \in P\right\}$

    $E = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists_{a \in \mathbb{Z}} : xa = 1\}$ $\quad$ $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists_{a \in \mathbb{R}} : xa = 1\}$

    $G = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists_{a \in \mathbb{Z}} : xa = 1\}$ $\quad$ $H = \{a \in \mathbb{Z} \mid \forall_{b \in \mathbb{Z}}, a + b = 0\}$

41. De entre os conjuntos seguintes, indique aqueles que são iguais.

    a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\right\}$, $\{1, 2\}$ e $\left\{n \in \mathbb{N} \mid 0 < n^2 \leq 4\right\}$.

    b) $\{r, t, s\}$, $\{s, t, r, s\}$, $\{t, s, t, s\}$ e $\{s, t, r, t\}$.

    c) $\emptyset$, $\{0\}$, $\{\emptyset\}$ e $\{\}$.

42. Dê exemplos de conjuntos A e B tais que se tenha simultaneamente

    a) $A \in B$ e $A \subseteq B$.

    b) $A \in B$ e $A \nsubseteq B$.

    c) $A \notin B$ e $A \subseteq B$.

43. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes:

    a) $1 \in \{1\}$ $\quad$ b) $1 \in \{\{1\}\}$ $\quad$ c) $\{1\} \in \{1\}$

    d) $\{1\} \in \{\{1\}\}$ $\quad$ e) $\{1\} \subseteq \{1\}$ $\quad$ f) $\{1\} \subseteq \{\{1\}\}$

    g) $\{1\} \in \{1, \{1\}\}$ $\quad$ h) $\{1, \{1\}\} \subseteq \{\{1\}\}$ $\quad$ i) $\{1\} \subseteq \{1, \{1\}\}$

44. Considere que A é um subconjunto de B e que B é um subconjunto de C. Considere ainda que $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, $d \notin A$, $e \notin B$ e $f \notin C$. Quais das afirmações seguintes são necessariamente verdadeiras?

    a) $a \in C$ $\quad$ b) $b \in A$ $\quad$ c) $c \notin A$ $\quad$ d) $d \in B$ $\quad$ e) $e \notin A$ $\quad$ f) $f \notin A$

45. Determine $\mathcal{P}(X)$, em que $X = \{3, \{1, 4\}\}$.