16. O Carlos, o João e o Manuel, suspeitos de um crime, fizeram os seguintes depoimentos, respetivamente:

    - O João é culpado, mas o Manuel é inocente.
    - Se o Carlos é culpado, o Manuel também o é.
    - Eu estou inocente, mas um dos outros dois é culpado.

    a) Os três depoimentos serão consistentes? (Ou seja, poderão ser todos verdadeiros?)
    b) Algum dos depoimentos é consequência dos outros dois?
    c) Supondo os três réus inocentes, quem mentiu?
    d) Supondo que todos disseram a verdade, quem é culpado?
    e) Supondo que os inocentes disseram a verdade e que os culpados mentiram, quem é culpado?

17. Mostre que a soma de dois números ímpares é um número par.

18. Mostre que o produto de números ímpares é um número ímpar.

19. Sejam a, b e c três números reais tais que $a > b$. Mostre, por contraposição, que se $ac \leq bc$ então $c \leq 0$.

20. Prove que, para todo o natural n, n^2 é ímpar se e só se n é ímpar.

21. Prove que, se um natural n é tal que $n^2 > 25$, então $n > 5$.

22. Prove que todo o natural primo maior do que 2 é ímpar.

23. Mostre que os únicos inteiros positivos consecutivos a, b, c que satisfazem $a^2 + b^2 = c^2$ são 3, 4, 5.

24. Mostre que se a e b são números reais tais que $a < b$, então $\frac{a+b}{2} < b$.

25. Considere os seguinte predicados $P(n)$ e $Q(n)$ sobre os números inteiros: $P(n)$: "$n < 5$" e $Q(n)$: "$n < 2$". Para cada valor de n, indique se a proposição $P(n) \to Q(n)$ é verdadeira ou falsa.

26. Suponha que os possíveis valores de x são coelhos e considere os seguintes predicados na variável x: $P(x)$: "x tem pelo branco"; $Q(x)$: "x gosta de cenouras". Traduza as seguintes fórmulas com quantificadores por palavras:

    a) $\forall_x\, P(x)$
    b) $\exists_x\, Q(x)$
    c) $\forall_x\, (P(x) \vee Q(x))$
    d) $\exists_x\, (\sim P(x) \wedge Q(x))$
    e) $\forall_x\, (P(x) \to Q(x))$
    f) $\exists_x\, (Q(x) \leftrightarrow \sim P(x))$

27. Suponha que os possíveis valores de x são cães e sejam $P(x)$: "x é preto"; $Q(x)$: "x tem quatro anos"; $R(x)$: "x tem manchas brancas". Traduza as seguintes frases para linguagem simbólica, usando quantificadores.

    a) Existe um cão preto.
    b) Todos os cães pretos têm quatro anos de idade.
    c) Existe um cão preto com manchas brancas.
    d) Todos os cães com quatro anos têm manchas brancas.
    e) Existe um cão tal que se tem quatro anos então não tem manchas brancas.
    f) Todos os cães são pretos se e só se não têm quatro anos.
    g) Não existem cães pretos.

28. Exprima cada uma das seguintes afirmações em linguagem simbólica, com quantificadores.

    a) A equação $x^3 = 28$ tem solução.
    b) A equação $x^2 - 4 = 0$ tem uma solução positiva.
    c) 1000000 não é o maior número natural.
    d) A soma de quaisquer três números naturais consecutivos é um múltiplo de 3.
    e) Entre cada dois números racionais distintos existe um outro número racional.

29. Prove que as proposições das alíneas b), c) e d) do exercício anterior são verdadeiras.

30. Escreva afirmações que sejam a negação das proposições que se seguem.

    a) Todos os peixes nadam.
    b) Alguns jornais exageram a realidade.
    c) Existe um gato sem cauda.
    d) Todas as peças de Shakespeare são comédias.

31. Considere a seguinte proposição: "todos os hobbits são criaturas pacíficas". Indique qual ou quais das seguintes proposições equivale à negação da proposição anterior.

    a) "Todos os hobbits são criaturas conflituosas."
    b) "Nem todos os hobbits são criaturas pacíficas."
    c) "Existem hobbits que são criaturas conflituosas."
    d) "Nem todos os hobbits são criaturas conflituosas."

32. Escreva a negação de cada uma das seguintes proposições sem aplicar a palavra "não" aos objetos quantificados.

    a) "Todos os rapazes são simpáticos."
    b) "Existem morcegos que pesam 50 ou mais quilogramas."
    c) "A inequação $x^2 - 2x > 0$ verifica-se para todo o número real x."
    d) "Existe um número inteiro n tal que n^2 é um número primo."
    e) "Existe um número natural que é maior que todos os outros números naturais."