86. Recorde a relação de equivalência σ, em $\mathbb{N}^2$, do exercício 67 (definida por $(x,y)\,\sigma\,(x',y') \Leftrightarrow y = y'$).

    a) A relação de $\mathbb{N}^2/\sigma$ para $\mathbb{N}$ constituída por todos os pares $\big([(x,y)]_\sigma, x+y\big)$, com $x,y \in \mathbb{N}$, é funcional?

    b) Existe uma função $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N}^2/\sigma & \to & \mathbb{N} \\ & [(x,y)]_\sigma & \mapsto & 2y \end{array}$? (Ou: esta função está bem definida?)

87. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $g(x) = x^2 - 1$. Determine

    a) $g(\{-1,0,1\})$ b) $g(]-\infty,0[)$ c) $g(\mathbb{R})$ d) $g^{-1}(\{0\})$ e) $g^{-1}(]-\infty,0[)$

88. Considere as seguintes funções

    $$\begin{array}{rccc} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_0^+ \\ x & \mapsto & |x|+1 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g:\mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & \operatorname{mdc}(x,6) \end{array}.$$

    Determine:

    a) $f(]-1,2])$ b) $f(\mathbb{R}_0^+)$ c) $f^{-1}(\{0,1,2\})$ d) $f^{-1}(]0,1])$

    e) $g(\{4,6,9\})$ f) $g\left(\left\{x \in \mathbb{N} \mid \exists_{y\in\mathbb{N}} : x = 3y\right\}\right)$ g) $g^{-1}(\{2\})$ h) $g^{-1}(\{3,4,5\})$

89. Sejam f, g e h as funções de $\mathbb{N}_0$ para $\mathbb{N}_0$ definidas por

    $$f(n) = n+1, \qquad g(n) = 2n \qquad \text{e} \qquad h(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ 1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

    Determine

    a) $f \circ f$ b) $f \circ g$ c) $g \circ f$ d) $g \circ h$ e) $f \circ (g \circ h)$

90. Sejam $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to D$ funções. Mostre que $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

91. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, seja $f_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a função definida por $f_n(x) = nx$. Indique todos os valores de n para os quais

    a) f_n é injetiva;

    b) f_n é sobrejetiva.

92. Considere as funções seguintes:

    $$\begin{array}{rccc} f_1:\mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f_2:\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f_3:\mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & |x|+1 \end{array}$$

    $$\begin{array}{rccc} f_4:\mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & \operatorname{mdc}(x,6) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f_5:\mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & \begin{cases} -2x & \text{se } x < 0 \\ 2x+1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

    a) Diga, justificando, quais destas funções são

       i) injetivas. ii) sobrejetivas.

    b) Para cada função bijetiva, determine a respetiva função inversa.

93. Seja $f : A \to B$ uma função. Mostre que:

    a) f é injetiva se e só se para cada $X \subseteq A$ se tem $X = f^{-1}\big(f(X)\big)$.

    b) f é sobrejetiva se e só se para cada $Y \subseteq B$ se tem $f\big(f^{-1}(Y)\big) = Y$.

    c) $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ para quaisquer $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ se e só se f é injetiva.

94. Sejam A, B, C conjuntos e $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ funções. Mostre que

    a) se f e g são injetivas, então $g \circ f$ é injetiva.

    b) se f e g são sobrejetivas, então $g \circ f$ é sobrejetiva.

    c) se f e g são bijetivas, então $g \circ f$ é bijetiva e $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

95. Sejam A, B, C conjuntos e f, h_1, $h_2 : A \longrightarrow B$ e g, k_1, $k_2 : B \longrightarrow C$ funções. Mostre que

    a) se g é injetiva e $g \circ h_1 = g \circ h_2$, então $h_1 = h_2$.

    b) se f é sobrejetiva e $k_1 \circ f = k_2 \circ f$, então $k_1 = k_2$.

96. Sejam A e B conjuntos e $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow A$ funções tais que $f \circ g = id_B$. Mostre que

    a) f é sobrejetiva.

    b) g é injetiva.

    c) g é sobrejetiva se e só se f é injetiva.

97. Em cada caso diga, justificando, se os conjuntos indicados são equipotentes.

    a) $\{1, 2, 5, 8\}$ e $\{\text{azul}, \text{verde}, \text{amarelo}\}$.

    b) $\{1, 3, 5, 7\}$ e $\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$.

    c) $2\mathbb{N}$ e $3\mathbb{Z}$. [Nota: $2\mathbb{N} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$; $3\mathbb{Z} = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$]

98. Sejam A, B, C, D conjuntos. Prove que

    a) se $A \sim B$, então $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$.

    b) $A \times B \sim B \times A$.

    c) se $A \sim C$ e $B \sim D$, então $A \times B \sim C \times D$.

99. Sejam A um conjunto e $\{0,1\}^A$ o conjunto de todas as funções de A em $\{0,1\}$. Para cada subconjunto B de A, considere a função

$$\begin{array}{rccl} \chi_B : & A & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B \\ 0 & \text{se } x \notin B \end{cases} \end{array},$$

chamada *função característica de B em A*.

    a) Mostre que

        i) para quaisquer $B, C \subseteq A$, se $\chi_B = \chi_C$, então $B = C$.

        ii) para cada função $f : A \longrightarrow \{0,1\}$, se $B_f = \{x \in A \mid f(x) = 1\}$, então tem-se $f = \chi_{B_f}$.

    b) Conclua que $\mathcal{P}(A) \sim \{0,1\}^A$.

100. Sejam B um conjunto e $B^{\{1,2\}}$ o conjunto de todas as funções de $\{1,2\}$ para B. Mostre que $B^{\{1,2\}} \sim B \times B$.